Katechismus

der

Algebra

zum

Gebrauch in Schulen und zum
Selbstunterricht

von

Ernst v. Wolffersdorff.

Leipzig,
in der Baumgärtnerschen Buchhandlung.

145. ~~Ht IV 6~~

Algebra

Ma.
o. 145.

[illegible]

Dono Iaeck

Katechismus

der

Algebra

zum

Gebrauch in Schulen und zum
Selbstunterricht

von

Ernst v. Wolffersdorff.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Leipzig, 1824.
In der Baumgärtnerschen Buchhandlung.

Vorrede.

Es ist wohl nicht zu verkennen, daß die Mathematik eine Wissenschaft sey, die uns zu mancher nützlichen Erkenntniß leitet und auf das ganze praktische Leben einen vielseitigen Einfluß übt. Denn wodurch werden die Verstandeskräfte mehr entwickelt, als durch ihre Erlernung? Führt sie uns nicht auf dem kürzesten Wege zur Wahrheit? Würden wir ohne sie den Lauf der Planeten, die Mond- und Sonnenfinsternisse bestimmt haben angeben können? Und so giebt es eine

unzählige Menge Gegenstände, die sich nur durch Anwendung dieser Wissenschaft ergründen lassen.

Obschon es nicht an Hülfsquellen mangelt, die Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften zu erlernen, und obgleich die meisten Lehrbücher sich nur durch die Art und Weise des Vortrages unterscheiden, ohne neue Theorieen aufzustellen, so glaube ich doch, nach wiederholter Aufforderung mit dem Versuche hervortreten zu dürfen, einen kurzen Auszug der Algebra, in Fragen und Antworten bearbeitet, dem Drucke zu übergeben, insofern die katechetische Form vorzugsweise dem Begriffe der Deutlichkeit und Faßlichkeit entsprechen möchte. Die Ordnung des Vortrags ist von der Lehrmethode des Herrn Major

Leonhardi, Lehrer der Mathematik an der Militär-Akademie zu Dresden, entlehnt.

Uebrigens gehe ich von der Ueberzeugung aus, daß man nach Erlernung der gemeinen Arithmetik so fort zu dem Studium der Algebra schreiten müsse, weil sie als die Grundlage aller übrigen Zweige der Mathematik anzusehen ist, und überhaupt auf die Entwickelung unserer Begriffe wesentlich hinwirkt. Zwar wird der Schüler anfänglich mit einiger Schwierigkeit zu kämpfen haben, bald aber wird ein desto schnelleres Fortschreiten sichtbar seyn und die fernere Ausbildung wird desto weniger Zeit und Mühe in Anspruch nehmen.

Ich habe stets die Absicht verfolgt, die Regeln für den Anfänger so klar als möglich

aus einander zu setzen. Nur in Ansehung der Logarithmen habe ich mir hier und da einige Abkürzungen erlaubt, weil ich außerdem die mir gesetzte Grenze hätte überschreiten müssen. Namentlich konnten die Functionen veränderlicher Größen und der Verwandlung ihnen am Werthe gleicher Ausdrücke nicht mit aufgenommen werden; es ist jedoch genügend angegeben, wie die Berechnung der Logarithmen erfolgen soll.

Ostern. 1824.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Erstes Kapitel.

Erklärung der Buchstabenrechnung 1

a) Die vier Rechnungsarten in der Buchstabenrechnung 63

b) Rechnungsarten mit algebraischen Brüchen 33

Zweites Kapitel.

Von den einfachen Gleichungen 37

a) Auflösung einfacher Gleichungen von Aufgaben mit einer unbekannten Größe. . . 46

b) Auflösung zusammen gehörender, einfacher Gleichungen von Aufgaben, mit mehrern unbekannten Größen 51

c) Auflösung einfacher, unbestimmter Aufgaben . . . . = ... 62

Drittes Kapitel.

Bildung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen 67

a) Erhebung der Wurzel zur zweiten, dritten und vierten Potenz und Ausziehung der Wurzeln aus denselben 72

b) Rechnungsarten mit Wurzel= oder Irrational=Größen. 98

Seite

Viertes Kapitel.

Von den höhern Gleichungen. 104
a) Auflösung der reinen Gleichungen. . . 107
b) Auflösung der verwickelten quadratischen Gleichungen und der höhern Gleichungen, welche die Form der quadratischen Gleichungen haben. 115
c) Haupteigenschaft der höhern Gleichungen, der Wurzeln und willkührliche Veränderungen derselben. 123
d) Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen. 137

Fünftes Kapitel.

Von den Reihen oder Progressionen. . . . 161
a) Arithmetische Verhältnisse und Proportionen. 161
b) Gemeine arithmetische Progressionen. . 167
c) Geometrische Verhältnisse u. Proportionen. 177
d) Geometrische Progressionen 182

Sechstes Kapitel.

Eigenschaften und Gebrauch der Logarithmen. . 189
a) Berechnung der Logarithmen und der natürlichen Logarithmen. 205
b) Anwendung der Logarithmen auf Rechnungsfragen. 218

Empfehlungswerthe Bücher der Baumgärtnerschen Buchhandlung in Leipzig:

Katechismus der Botanik als Anleitung zum Selbststudium dieser Wissenschaft, und als botanisches Wörterbuch zu gebrauchen. Gestaltlehre, mit mehr als 600 erläuternden Figuren. kl. 8. br. mit schwarzen Kupfern. 1 Thlr. 12 Gr. mit bunten Kupfern 2 Thlr.

Wir glauben den Anfängern der Botanik durch dieses Buch ein längst gewünschtes wohlfeiles und seinem Zwecke vollkommen entsprechendes Mittel zu einer gründlichen Vorbereitung für diese Wissenschaft zu liefern. Mehr als 600 passend gewählte vom Herrn Verfasser selbst gezeichnete und vom Herrn Erdmann nett und sauber gestochene Figuren dienen als eine Erläuterung für die dem Anfänger, ohne dergleichen so schwer verständliche Kunstsprache. Ein großes Register läßt das Buch auch als Wörterbuch zum Verstehen der lateinischen botanischen Schriftsteller gebrauchen.

Katechismus der Erdbeschreibung, eine faßliche Anleitung zur Kenntniß der Erde und ihrer Völker. Nach der zwanzigsten vermehrten und verbesserten Ausgabe, aus dem Englischen übersetzt und mit einigen Zusätzen versehen, von C. F. Michaelis. kl. 8. br. 12 Gr.

Dieser Katechismus vereinigt in der Kürze alle Eigenschaften, die ihn zum ersten Unterricht über die wesentlichen und wichtigsten Gegenstände der Geographie höchst brauchbar machen. Sowohl das Allgemeine, als das Besondere derselben ist faßlich und in guter Ordnung dargestellt. Die Begriffe der mathematischen und physischen Geographie sind eben sowohl erörtert, als die Länder und Hauptstädte nach ihren Grenzen, ihrer Beschaffenheit, ihren Erzeugnissen und der Zahl und dem Charakter der verschiedenen Völker, mit bei-

gefügten historischen Hinweisungen, zu einer leichten Uebersicht aufgeführt, so daß junge Leute hierdurch auf angenehme Art zum weitern Studium dieser mannichfaltigen Gegenstände angeleitet und vorbereitet werden.

Katechismus der Naturgeschichte und zwar über das Thierreich. Zum Jugendunterricht. Aus dem Englischen nach der dritten Ausgabe übersetzt von C. F. Michaelis. Mit 39 Figuren. kl. 8. br. 12 Gr.

Das große Gebiet der ganzen Naturgeschichte, nach einem streng wissenschaftlichen Systeme dargestellt, darf man hier nicht erwarten. Aber Alles, was der Jugend einen Vorschmack von ihr geben, und sie mit dem Wichtigsten aus dem Thierreiche bekannt machen kann, ist hier angenehm, in guter Ordnung, interessant und deutlich vorgetragen. Die beigefügten Abbildungen mancher Thiere sind eine Zugabe, welche dem Werkchen einen Vorzug vor dem englischen Originale verschafft.

Katechismus der Geometrie, enthaltend die Grundbegriffe dieser nützlichen Wissenschaft, zum Gebrauch für die Jugend. Aus dem Englischen übersetzt von August Thieme, Medicinae Baccalaureus. Mit vielen geometrischen Abbildungen. kl. 8. br. 12 Gr.

Wir empfehlen dem Publikum dieses Schriftchen mit der Ueberzeugung, daß es der Jugend nicht minder nützlich seyn werde, als die übrigen von uns schon angezeigten; es hat keinen geringern Zweck, als Kinder zu dem höchst fruchtbringenden Studium der Mathematik vorzubereiten, und sie gleichsam spielend in diese Wissenschaft einzuweihen.

Katechismus der Mythologie; ein Abriß der Geschichte der heidnischen Gottheiten, als Einleitung in das Studium der alten Klassiker. Zum Schulgebrauch. Von C. Irving, Doctor der Rechte. Aus dem Englischen bearbeitet. kl. 8. br. 12 Gr.

Diese kurze, faßliche und für das nächste Bedürfniß möglichst vollständige Uebersicht der alten Griechischen und Römischen Götter- und Fabellehre wird zur Erleichterung des Jugendunterrichts in diesem Fache sehr bequem gebraucht werden können. Der Uebersetzer hat das englische Original aus guten Quellen ergänzt.

Katechismus der Griechischen Alterthümer nach dem Englischen des Dr. Irving. kl. 8. broch. 12 Gr.

Dies Werkchen ist sehr brauchbar, sich mit den wichtigsten Gegenständen des Griechischen Alterthums, in Absicht auf bürgerliche Verfassung, Religion, Sitten, häusliches Leben und merkwürdige Einrichtungen, vorzüglich in Athen und Sparta, bekannt zu machen, und hierdurch das Studium der alten Klassiker zu erleichtern.

Katechismus über die Jüdischen Alterthümer von Dr. J. C. Irving. Aus dem Englischen. kl. 8. broch. 12 Gr.

Da dieser Gegenstand noch wenig kurz und populär behandelt ist, so wird diese Darstellung des Wichtigsten aus den Einrichtungen, Anstalten, Sitten und Gewohnheiten der alten Juden doppelt interessant und willkommen seyn, und zur Benutzung für biblische Geschichte und Religionsunterricht als Hülfsmittel die günstige Aufnahme nicht verfehlen, welche diesem Katechismus Deutlichkeit und Sorgfalt der Behandlung zu verbürgen scheinen.

Katechismus der Chemie, für diejenigen, welche einige Kenntniß dieser Wissenschaft erlangen wollen, von August Thieme, Medicinae Baccalaureus. kl. 8. br. 12 Gr.

Wir können dieses kleine Buch als sehr brauchbar und nützlich empfehlen; denn es umfaßt, trotz seines geringen Umfanges, nicht nur die reine neuere Chemie, sondern zeichnet sich auch durch wissenschaftliche Anord-

nung der Materien aus, und kann daher selbst solchen anempfohlen werden, die sich in Zukunft der Chemie ausschließlich befleißigen wollen, indem sie die Elemente dieser weitläuftigen Wissenschaft hier gleichsam mit einem Blick übersehen lernen.

Katechismus der Geschichte des alten Griechenlandes, zur Uebersicht der Hauptbegebenheiten und Denkwürdigkeiten desselben für die Jugend, aus dem Englischen nach der siebenten Ausgabe übersetzt von C. F. Michaelis. kl. 8. br. 12 Gr.

Zur Einleitung in das Studium der ältern Griechischen Geschichte und der Classiker erhält man hier einen lehrreichen Ueberblick des alten Griechenlandes. Wer sich in kurzem auf eine angenehme Art über die wichtigsten Gegenstände dieses Fachs belehren, oder einen Leitfaden zum frühen Unterricht gebrauchen will, wird mit diesen Werkchen seinen Wunsch leicht befriedigen können.

Katechismus der neuern Geschichte zur vorläufigen Uebersicht der merkwürdigsten Weltbegebenheiten von der Geburt Jesu an bis auf die gegenwärtige Zeit. Für die Jugend aus dem Englischen nach der sechsten Ausgabe übersetzt und mit einigen Zusätzen begleitet von C. F. Michaelis. kl. 8. br. 12 Gr.

Zur Erleichterung des weitläuftigen Studiums der Völkergeschichte für die frühere Jugendzeit wird dieses kleine Werk mit Nutzen gebraucht werden können. Es giebt in 39 Kapiteln ein Bild der Hauptbegebenheiten der verschiedenen Nationen, von Christi Geburt an bis auf die neueste Zeit freilich nur in den bedeutendsten Zügen, an die sich das Gedächtniß halten kann, und mehr oder weniger ausführlich nach Verhältniß der Wichtigkeit, aber doch so, daß der weitere Unterricht und das speciellere Studium durch die Be-

kanntschaft mit diesem faßlichen Grundrisse eine willkommene Vorbereitung erhalten. Auch kann der Lehrer zur Wiederholung und Erläuterung einzelner Theile der Geschichte diese Schrift als Leitfaden benutzen.

Katechismus der römischen Geschichte, vom Ursprung des römischen Reichs an, bis zu seinem Untergange; in chronologischer Ordnung, als Einleitung in die ausführliche Geschichte der römischen Nation. Aus dem Englischen übersetzt von C. F. Michaelis. kl. 8. broch. 12 Gr.

Die Hauptbegebenheiten der Geschichte des römischen Reichs von seiner Entstehung an bis zu seinem Untergange, und dabei die merkwürdigsten Personen, welche in diesem Zeitraume als Regenten, Staatsmänner, Helden und Schriftsteller unter den Römern aufgetreten sind, nach der Zeitfolge kennen zu lernen, giebt dies Werkchen eine zweckmäßige Anleitung. Es gewährt eine klare Uebersicht des Wichtigsten, woran sich das Gedächtniß bei dem weitern Studium der Geschichte und bei dem Lesen der hierher gehörenden Schriften halten kann, und ist daher mit Nutzen für den Jugendunterricht und zur allgemeinen Selbstbelehrung zu gebrauchen.

Katechismus der Perspective, als nothwendige Zugabe zu dem Katechismen der Zeichenkunst und Architectur. Mit erläuternden Kupfertafeln. Aus dem Englischen. Nebst den Grundsätzen des Grafen Algarotti über die Perspective. Uebersetzt und herausgegeben von C. F. Michaelis. kl. 8. br. 8 Gr.

Die Perspective, ein nothwendiges Erforderniß für die Zeichenkunst, wird hier auf eine faßliche Art erklärt und durch Beispiele anschaulich gemacht. Der Uebersetzer fügte zu mehrerer Deutlichkeit Algarotti's Grundsätze der Perspective bei, und so wird das Ganze dem Lehrer beim Unterricht über diesen Gegenstand,

und dem Schüler zur Anwendung der Regeln einen brauchbaren Leitfaden gewähren.

Katechismus der Zeichnung und Malerei. Aus dem Englischen übersetzt, nebst einigen historisch ästhetischen Andeutungen über diese Künste, um Zeichnungen und Gemälde zu beurtheilen. Von C. F. Michaelis. kl. 8. br. 12 Gr.

Diese Schrift enthält eine faßliche Anleitung zum zweckmäßigen, stufenweise fortschreitenden Verfahren im Zeichnen, von den ersten Erfordernissen und mechanischen Anfangsgründen bis zur sorgfältigen Ausführung, in Absicht auf Proportion, Beleuchtung, Colorit, Ausdruck u. s. w. Der Verfasser verweilt vorzüglich bei der Zeichnung menschlicher Gestalten, und der Landschaften, und erklärt sich auch über Transparents und Pastellmalerei. Der Uebersetzer giebt in der voranstehenden Abhandlung denkenden Kunstfreunden Winke über das Wesen und die verschiedenen Gattungen und Schulen der Malerei. Und so verdient dieß Werkchen Lehrern und Lernenden, für die Theorie und Praxis der Kunst, als ein nützlicher Leitfaden empfohlen zu werden.

Katechismus der Mechanik, für Mechaniker, Professionisten, Fabrikanten, Müller und Oekonomen, die auch für Schulen als Unterricht in der durch die Naturlehre erläuterten Maschinenlehre. Mit 56 Fig. auf 4 Kupfertafeln. Von K. F. Muhlert. kl. 8. 16 Gr.

Diese faßliche und anschauliche Darstellung des mechanischen Theiles der Naturlehre in Verbindung mit der praktischen Mechanik, nach den neuesten Werken unserer als auch der ausländischen Literatur bearbeitet, wird allen Künstlern und Arbeitern im Fache des Mechanischen ein wissenschaftliches Verständniß und eine richtige Erkenntniß des Mechanismus geben, eben so wie die für das praktische Leben vorzubereitende Ju-

gend hier einen deutlichen Unterricht in der Mechanik in weiterer Bedeutung erhält.

Katechismus, oder Examinatorium über die Physiologie des Menschen von G. Th. Fechner, Med. Baccal. kl. 8. br. 16 Gr.

Keine andere Wissenschaft ist bisher in den öffentlichen Schulen so vernachlässiget worden, als die Selbstkenntniß, oder die nähere Kenntniß des menschlichen Körpers. Unser Körper ist die künstlichste Maschine, wodurch die Seele sich ausspricht und handelt. Diese Maschine näher kennen zu lernen ist und sollte unsere Pflicht seyn: um diese nun um so leichter erfüllen zu können, schrieb der rühmlichst bekannte Verfasser dieses kleine Lehrbuch nieder, und richtete es besonders so ein, daß es sehr zweckmäßig in Schulen kann gebraucht werden.

Katechismus der Mineralogie für Anfänger und Liebhaber dieser Wissenschaft. Erster Theil. Allgemeine Oryktognosie. Mit 8 Steindrucktafeln. kl. 8. br. 18 Gr.

Sammlern von Mineralien, welche die Wissenschaft nicht in ihrem ganzen Umfange studirt haben, wird das vorstehende Werk als ein Leitfaden sehr nützlich werden, da dieses Naturreich in demselben systematisch und gründlich abgehandelt wird. Zur Belehrung in öffentlichen Schulen würde es ebenfalls sehr paßlich seyn.

Katechismus über den Gebrauch des Erdglobus, ein Hülfsmittel zur Erläuterung der interessantesten Sätze im Betreff der Gestalt unsrer Erde, der Lage der verschiednen Orte auf ihr, und des Wechsels der Jahres- und Tageszeiten; von M. Carl Steinau. Mit einem Kupfer. kl. 8. br. 8 Gr.

War jemals in dem Unterricht der Geographie ein

kleines Lehrbuch für Lehrer und Lernende nöthig; so war es gewiß gegenwärtiges; denn bis jetzt besitzt die Literatur noch sehr wenig darüber.

Katechismus der Licht- oder Seh-Lehre für junge deutsche Künstler verschiedner Gattung nach dem Englischen bearbeitet von Lct. Chr. Andr. Nilson, Secretair bei dem Magistrate der Königl. Baierschen Stadt Augsburg, und Linearzeichnungs-Lehrer an den königl. Studienanstalten daselbst. Mit vielen Holzschnitten. kl. 8. br. 8 Gr.

Jeder Zeichner und jeder Maler wird es dem Verfasser gewiß großen Dank wissen, daß er diese Arbeit unternommen, indem dieses Werk weder diese Künstler noch der Geometer und der Architekt wohl entbehren können. Für Maler- und Zeichenschulen ist es eins der nöthigsten Bücher.

Katechismus der Logik oder Denklehre, bestimmt zum Selbst- und Schulunterricht, mit erläuternden Beispielen von M. G. Th. Fechner. kl. 8. br. 16 Gr.

Der Titel entspricht den Zweck dieses Werks und kann auf einer wohl eingerichteten Schule nicht entbehrt werden. Auch jeder Privatmann, der richtig sprechen und schreiben will, wird sich dieses Katechismus mit wirklichen Nutzen bedienen.

Katechismus oder leicht faßlicher Unterricht über die Anfangsgründe der Physik oder Naturlehre. Nach der dritten Ausgabe der Leçons élémentaires de physique par L. Cotte 1821 bearbeitet von M. Carl Steinau. Mit Kupfern. kl. 8. 16 Gr.

So klein auch dieses Lehrbuch ist und so unbedeutend es scheint, so wird es doch durch seine Brauchbarkeit sehr viel Nutzen verbreiten. Alles was den Menschen umgiebt, gehört in die Physik oder Naturlehre und dieser Katechismus, der mit dem neuesten Entdeckungen in der Wissenschaft ausgestattet ist, wird in den

Schulen gewiß mit besondern Nutzen angewendet werden.

Katechismus der Aesthetik oder Geschmackslehre, zur Beförderung richtiger Begriffe über das Schöne, Erhabene, Sentimentale, Lächerliche u. s. w. kl. 8. br. 12 Gr.

Wer in der heutigen Welt Anspruch auf Bildung macht, und in gebildeten Zirkeln, Urtheile über Kunstwerke fällen will, muß sich durchaus die Grundgesetze der Aesthetik zu eigen gemacht haben; er kann sich weder über Baukunst noch Schauspielerkunst, Dichtkunst, Musik, Zeichen und Malerkunst nicht mit Richtigkeit ausdrücken, wenn er ein Fremdling in dieser Wissenschaft geblieben ist. Obiges Werk wird jeden den nöthigen Unterricht ertheilen und ihn in dieser Wissenschaft einweihen.

Katechismus der Sternkunde, nach der fünften Ausgabe des Dr. Irving. Aus dem Englischen bearbeitet und nach den vorzüglichsten Schriftstellern vermehrt und verbessert. kl. 8. 12 Gr.

Man möchte sagen, daß die Sternkunde die älteste aller Wissenschaften ist, denn im Nomaden Leben unserer Ur-Ur-Vorfahren, wurde sie schon durch Traditionen wissenschaftlich gelehrt und noch heutigen Tags wird die Kenntniß der Himmelskörper immer für eine der wichtigsten angesehen. Sie ist es, die unsere Zeit eintheilt, und uns die Ordnung vorschreibt. Derjenige, der sich in dieser Wissenschaft Kenntnisse erwirbt, baut zugleich in seinem Herzen dem Schöpfer aller dieser Wunder einen unumstößlichen Altar auf. Auf jeder Seite dieses Buchs wird er eine Aufforderung zur Anstaunung und Bewunderung des Ewigen finden.

Katechismus der römischen Alterthümer, oder Nachricht von der Religion, der Staatsverwaltung, dem Kriegs- und Seewesen, dem häuslichen und öffentlichen Leben und den vornehmsten Sitten,

Gebräuchen und Einrichtungen der römischen Nation, nebst einer Beschreibung der öffentlichen Gebäude der Stadt Rom. Von Dr. C. Irving. Aus dem Engl. übersetzt und mit Zusätzen ergänzt und erläutert. Mit einem Titelkupfer. kl. 8. 12 Gr.

Der Titel zeigt hinlänglich was man in diesem Werk zu erwarten hat. Jedermann weiß, daß das römische Reich, das größte Reich Europens war und daß es über einen großen Theil von Africa und Asien herrschte. Selbst zum bessern Verstehen der alten Classiker giebt uns dieses Werk sehr viele Hülfsmittel und verdient allerdings in den Hochschulen eingeführt zu werden.

Katechismus der preußischen Geschichte, von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten, für die Jugend der preußischen Monarchie und alle, welche die preußische Geschichte in gedrängter Kürze kennen lernen wollen. Von M. J. F. Märker. kl. 8. 16 Gr.

Allerdings bestehen schon bändereiche classische Werke über diesen Gegenstand, aber an einen solchen zum Unterricht in den Schulen fehlte es durchaus noch, der Verfasser bemerkte diese Lücke und füllte sie auf eine sehr dem Endzweck entsprechende Weise rühmlich aus.

Katechismus der sächsischen Geschichte, für die Jugend von M. J. F. Märker. 16 Bogen stark. Preis 18 Gr.

Der Verfasser, der selbst eine lange Reihe Jahre Unterricht in der Geschichte gab, hält den Unterricht für die Jugend am zweckmäßigsten und dem Gedächtniß am bleibensten, wenn er in Fragen und Antworten besteht. Dieses bewog ihn diesen Katechismum als ein Lehrbuch für Schulen zu schreiben. An einem solchen Lehrbuch hat es unsern Schulen bis jetzt gefehlt. Derjenige Regent, der in seinen Unterthanen Liebe für das Vaterland erwecken will, muß vorzüglich die Geschichte des Vaterlands in Schulen lehren lassen.

Katechismus der Musik, oder kurze und faßliche Erläuterung der wichtigsten die Tonkunst betreffenden Begriffe und Grundsätze. Nebst einer allgemeinen Einleitung in die Kunst, das Pianoforte zu spielen. Aus dem Englischen bearbeitet von C. F. Michaelis. kl. 8. broch. 12 Gr.

Zur Empfehlung dieses Werks wird es zureichend seyn, wenn man seinen Inhalt zum Theil nur hier anzeigt. 1. Von Noten und Linien. 2. Tonleiter 3. Namen, Geltung, und Dauer der Noten in der Zeit. 4. Vom Punkt als Verlängerungs-Zeichen. 5. Von den verschiedenen musikalischen Zeichen. 6. Von den Zeitmaaß ꝛc. und so theilt sich dieses Buch in 18 Kapitel. In London hat es mehrere Auflagen erhalten.

Katechismus der Höflichkeit und der feinen Lebensart. In Unterredungen und allgemeinen Regeln für die Jugend. Von C. F. Michaelis. Zweite Auflage. Preis 8 Gr.

Bei den nicht ganz ungegründeten Klagen, daß unsere Jugend häufig verwildere, und über Anstand und gute Sitten sich leichtsinnig oder übermüthig hinwegsetze, wird eine Schrift, welche die Grundsätze der feinen Lebensart und wahren Höflichkeit so faßlich und einleuchtend vorträgt, wie die gegenwärtige, Eltern und Erziehern nicht unwillkommen seyn. Sie giebt ihnen eine bequeme Anleitung frühzeitig Fehlern und Unarten zuvor zu kommen, die das gesellige Verhältniß stören, und dagegen ein Betragen zu gründen, daß bei allen übrigen guten Eigenschaften nicht ohne Nachtheil und immer ungern vermißt wird.

Katechismus für Mütter, als ein Leitfaden zum ersten häuslichen Unterricht der Kinder über leicht faßliche und nützliche Gegenstände. Nach dem Englischen aus der 29. Ausgabe bearbeitet. kl. 8. broch. 6 Gr.

Mütter und andere Personen, die sich mit der

frühen häuslichen Erziehung beschäftigen, erhalten hier ein Büchelchen, wie sie es sich oft gewünscht haben werden, ihren kleinen Kindern die ersten gemeinnützigen Kenntnisse mitzutheilen, und überhaupt ihre Aufmerksamkeit zu wecken und die vortheilhafte Entwickelung ihres Verstandes auf eine leichte unterhaltende Art zu befördern.

D. Martin Luthers kleiner Katechismus. In Fragen und Antworten erläutert nebst hinzugefügten Sprüchen. Als Hülfsbuch bei dem Gebrauche des Dresdener Katechismi von Georg Hieronymus Rosenmüller, Pfarrer in Oelzschau bei Leipzig. kl. 8. 6 Gr.

Es ist der verbesserte Dresdner Katechismus, und ist eigentlich für das Herzogthum Sachsen bestimmt. Wegen seiner Zweckmäßigkeit ist er schon in mehreren Schulen eingeführt. Prediger, die gesonnen sind, eine Aenderung in ihren Schulen zu machen, und dieses Lehrbuch noch nicht kennen, erhalten ein Exemplar dieses Katechismi gratis von der Verlagshandlung, wenn sie sich direkte in frankirten Briefen an dieselbe verwenden.

Katechismus der Architektur, für die elegante Welt und unsere Schulen, zur Beförderung richtiger Begriffe von der Baukunst und der Säulenordnung. Nach dem Englischen. Mit Kupfern. kl. 8. brochirt 12 Gr.

Unser Zeitgeist verlangt in keiner Wissenschaft fremd zu seyn. Dieses kleine Werkchen lehrt jeden Leser die Hauptgrundlinien der Architektur und er bleibt nach Durchlesung kein Laie mehr in dieser Wissenschaft.

Handels-Katechismus, oder Einleitung in der Handlungswissenschaft, worin die wichtigsten, zur Bildung des Kaufmanns nöthigen Kenntnisse, Begriffe und Grundsätze mitgetheilt und erklärt werden. Aus dem Englischen nach der zweiten Aus-

gabe bearbeitet von C. F. Michaelis. kl. 8. broch. 12 Gr.

So klein auch dieses Buch ist, so viel nützliches enthält es. Nicht allein die Jugend, sondern auch ältere Personen, wenn sie nicht die Handlung erlernt haben, können daraus einen sehr deutlichen Begriff über den Handel erlangen.

Gesundheitskatechismus oder goldne Regeln zur Erhaltung und Verlängerung des Lebens und der Gesundheit für junge und alte Leute. Aus dem Englischen. kl. 8.

C. F. Solbrig, Museum der Declamation, enthaltend eine strenge Auswahl der beliebtesten Gedichte, Dialogen, Monologen, Reden, Erzählungen und andere prosaische Aufsätze, ernsten und launigten Inhalts, nebst Erläuterungen bei jedem Gedicht über den Vortrag desselben. 3 Bde. 1r und 2r Bd. Zweite Aufl. 8. br. 4 Thlr.

Dessen der Hauspoet, eine Sammlung launiger Gedichte und Epigramme zur Unterhaltung freundschaftlicher Zirkel. Zwei Bändchen. 8. à 1 Thlr.

Dessen Monologen, Reden und Erzählungen zum Behuf der Declamation nebst Regeln über den Vortrag derselben. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Dessen lustiger Declamator. Eine Auswahl launiger Dichtungen und Travestien zur Unterhaltung gesellschaftlicher Zirkel gesammelt. kl. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Dr. C. G. Steinbeck, Feuerkatechismus für die liebe Jugend in ganz Deutschland. Vierte, alle vorhergegangenen Nachdrücke unbrauchbar machende, Auflage. 12. 3 Gr.

Erste Unterhaltungen der Kinderwelt mit Gott. Auf Schweizerpapier. 12. br. 6 Gr.

Kurzer Begriff aller vorzüglich interes-

santen Wissenschaften und schönen Künste, worin sie nach ihrem Wesen und Werth erklärt und beschrieben werden. Nebst einem kurzen Abriß der Geschichte des deutschen Reichs und einer Vorrede vom Vicedirector M. Dolz. kl. 8. 18 Gr.

Joh. Bellamy's Geschichte aller Religionen mit Angabe der Lehren und der Ausübung des Gottesdienstes unter allen Arten und Bekennern des Christenthums, enthaltend eine Reihe erläuternder Untersuchungen über die Meinungen, Sitten und gottesdienstlichen Gebräuche in den Kirchen von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten und über den Ursprung und die Ursache und Ausübung des Götzendienstes und seiner verschiedenen Formen. Nach der zweiten englischen Ausgabe übersetzt. 8. 1 Thlr. 4 Gr.

Asiatisches Bilderbuch, oder das asiatische Magazin 9 Hefte, in einem Bande zu herabgesetzten Preis. Mit 52 illuminirten Kupfern. 4. 8 Thlr.

W. Bingley's Biographieen der Thiere, oder Annalen von den Fähigkeiten, der Lebensart, den Sitten und der Haushaltung der thierischen Schöpfung. Nach dem Englischen mit Zusätzen bearbeitet und mit einer Einleitung über die Physiologie der Thiere versehen von Dr. J. A. Bergk. 8. 3 Theile. 4 Thlr. 12 Gr.

Das goldne Buch für hohe und niedere Stände oder Grundregeln gut, klug und leicht durch die Welt zu kommen. Zweite verbesserte Auflage, aus dem Englischen nach der eilften Ausgabe. gr. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Freundschaft mit Gott. Ein Versuch zur Erweckung des religiösen Gefühls. Nach dem Englischen des Richard Jones neu bearbeitet vom Adjunct C. F.

L. Netto, Prediger in Ober-Weimar. Zweite Auflage. 8. 1 Thlr.

Führer der häuslichen Glückseligkeit im ehelichen Leben. In sechs Briefen. Nach der 13. Ausgabe aus dem Englischen bearbeitet von C. F. Michaelis. kl. 8. 16 Gr.

Der schützende Genius. Eine Geschichte voller Wunder, aber ohne Geister. Von S. 2 Theile, mit einem Kupfer. Schreibpapier 8. 1 Thlr. 12 Gr.

Vater Gutmanns Spaziergänge mit seinen Kindern, oder Unterhaltungen über Natur, Menschenleben und Vorsehung mit der erwachsenen Jugend. Vom Verfasser des mythologischen und naturhistorischen Kinderfreundes. In zwei Theilen. 2 Thlr.

Heldenbuch. Ein Denkmal der Großthaten in den Befreiungskriegen von 1808 bis 1815. Deutschen Vaterlandsfreunden und besonders der Jugend gewidmet v. Chr. Niemeyer, Verfasser des deutschen Plutarchs. Fünfte Auflage. Mit 46 Portraits und einer illum. Gruppe, in allegor. Umschlag. br. 1 Thlr. 16 Gr.

Die Künste des menschlichen Lebens, in Beziehung auf Nahrung, Kleidung und Wohnung. In einer Reihe von Briefen aus dem Englischen übersetzt und zur belehrenden Unterhaltung für die Jugend herausg. von Prof. C. F. Michaelis. 8. br. 18 Gr.

Lebensbeschreibungen für Knaben; oder charakteristische Geschichten, um Kinder zur Verehrung tugendhafter und Verabscheuung lasterhafter Grundsätze aufzumuntern. Aus dem Engl. der Mistriß Pilkington von Dr. A. Waltmann. 12. gebunden. 14 Gr.

Lebensbeschreibungen für Mädchen; oder moralische und lehrreiche Beispiele für junge Frauenzimmer. Aus dem Engl. der Mistriß Pilkington von Dr. A. Waltmann. 12. sauber gebunden. 14 Gr.

Neuer englischer Orbis pictus, the progress of Man, oder die Geschichte des Menschen und der menschlichen Gesellschaft, in Bildern zur Belehrung und Unterhaltung der Jugend. 2 Bändchen mit 34 illum. Kupf. Zweite Auflage. 8. 2 Thlr.

M. Georg Hieronimus Rosenmüller, Mitgabe für das ganze Leben beim Austritt aus der Schule und Eintritt in das bürgerliche Leben, am Tage der Confirmation der Jugend geheiligt. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. kl. 8. br. 16 Gr.

M. Philipp Rosenmüller, religiöse moralische und unterhaltende Anecdoten. Nach dem Engl. 2 Thle. kl. 8. 2 Thlr.

Scenen aus der Kinderwelt. Ein neues Lesebuch für Kinder, welche eben angefangen haben, lesen zu lernen. Ein Geburtstagsgeschenk für gute Kinder, von F. W. v. B. 8. 8 Gr.

G. B. Schmiedlein, Handwörterbuch der Naturgeschichte, über die drei Reiche der Natur; nach dem Franz. frei bearbeitet. 1r bis 3r Theil. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

Der Schutzgeist der Menschen, besonders der Jugend gegen Gefahren und Unglück aller Art durch warnende Beispiele. 8. broch. 12 Gr.

Die Kunst der rednerischen und theatralischen Declamation, nach ältern und neuern Grundsätzen über die Stimme, den Gesichts-Ausdruck, aufgestellt und durch 152 Figuren erläutert, für öffentliche Redner, Schauspieler und Künstler. Mit 24 Kupferplatten. gr. 8. 3 Thlr.

Erstes Kapitel.

Erklärung der Buchstabenrechnung.

Frage. Wodurch unterscheidet sich die Buchstaben- von der Zahlenrechnung?

Antwort. Dadurch, daß man statt der Zahlen Buchstaben in Rechnung bringt.

F. Welchen Vortheil gewährt es, daß Buchstaben statt der Zahlen in Rechnung gebracht werden?

A. Daß man schneller und bequemer zum Resultate gelangt und die Rechnung leichter übersehen kann.

F. Ist es gleichgültig, welche Buchstaben man beim Rechnen anwendet?

A. Ja! Indeß wählt man die Anfangsbuchstaben zu den bekannten und die letzten Buchstaben im Alphabete zu den unbekannten Größen.

F. Welchen Vortheil gewährt diese Bezeichnungsart?

A. Daß man die Entstehung und Zusammensetzung der Größen immer daraus sehen kann; welches durch die Verbindung der Zahlen mit einander durch die vier Rechnungsarten nicht wahr zu nehmen ist.

Je deutlicher und bequemer daher eine solche Bezeichnungsmethode ist, desto vortheilhafter ist sie.

F. Kann man mit Buchstaben bezeichneter Größen eben solche Rechnungen vornehmen, wie dies in der Zahlenrechnung statt fand?

A. Ja! Doch bedarf es gewisser Erläuterungen, die in den nachfolgenden Fragen aus einander gesetzt werden sollen.

F. Kann man mit einem Buchstaben in einer Rechnungsfrage mehrere Gegenstände bezeichnen?

A. Nein; jeder gewählte Buchstabe kann nur den Gegenstand bezeichnen, für welchen er gewählt wird. Es kann aber ein Gegenstand zuweilen mehrere Zahlenwerthe annehmen und in sofern heißt er eine veränderliche Größe; hat er aber einen einzigen bestimmten Zahlenwerth, so ist er eine beständige Größe.

F; Wie nennt man die Verbindung durch Buchstaben bezeichneter Gegenstände, durch die bekannten Rechnungsarten, in welcher jeder Buchstabe einen bestimmten Zahlenwerth hat?

A. Einen algebraischen Ausdruck, oder eine algebraische Größe.

Z. B. $8a$, $3ab$, $2mn$, $\frac{ab}{2}$, $\frac{m-n}{2}$.

F. Was versteht man unter einer Formel?

A. Einen algebraischen Ausdruck, welcher den Werth einer unbekannten Größe angiebt.

Z. B. $x = \frac{a+b}{2}$. Wäre in dieser Formel $a = 5$ $b = 3$, so ist $x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Es ist daher eine Formel auch die Bestimmbarkeit einer Größe aus andern gegebenen, welche das gegenseitige Verhältniß ausdrücken.

F. Wie werden die Formeln gefunden?

A. Durch Gleichungen, indem man für einen Gegenstand, aus den Bedingungen der Aufgabe, zwei am Werthe gleiche Gegenstände unter verschieden zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken aufsucht, so daß die unbe-

kannte Größe wenigstens in dem einen vorkommt. Hierauf verbindet man die beiden gleichen Ausdrücke durch das Gleichungszeichen und sucht die bekannten Größen von den unbekannten, nach den Grundsätzen der Zahlenrechnung, zu trennen, um aus den bekannten Größen den Werth für die unbekannten zu bestimmen. Z. B. aus der Proportion 4 : 8 = 6 : x findet man das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittlern. $\frac{4 : 8 = 6 : x}{4 \times x = 8 \times 6}$. Beide Theile der Gleichung durch 4 dividirt, giebt $x = \frac{8 \times 6}{4} = \frac{48}{4} = 12$. Setzt man aber 4 = a, 8 = b, 6 = c; so ist die Proportion wieder:

$$\frac{\dfrac{a : b = c : x}{a \times x = b \times c}}{x = \dfrac{b \times c}{a} = \dfrac{bc}{a}.}$$

Daher ist die Algebra derjenige Theil der Mathematik, welcher Formeln finden lehrt, insofern es durch Gleichungen möglich ist.

F. Welchen Nutzen haben demnach die Formeln?

A. Der Nutzen besteht darin, daß, wenn man einmal für eine Aufgabe die Formeln entwickelt hat, alle Aufgaben von derselben Gattung darnach leicht berechnet werden können, und da man die Verbindung der gesuchten Größe mit den gegebenen bekannten daraus wahrnimmt, so findet man auch ohne Schwierigkeit die Regel zur Auflösung.

F. Wodurch erkennt man, daß eine Größe größer oder kleiner als eine andere sey?

A. Indem man die beiden Größen durch einen Winkel $>$ oder $<$ trennt, dessen Oeffnung gegen das Größere und die Spitze gegen das Kleinere zu stehen kommt. Dieses Zeichen spricht man aus: „ist größer als" z. B. $8 > 5$ oder 5 ist kleiner als 8.

F. Auf welche Weise wird die Gleichheit zweier Größen angegeben?

A. Durch zwei liegende Striche ($=$), welche durch den Ausdruck: „ist gleich" bezeichnet werden. Z. B. ist der Werth für x eben so viel,

als $\frac{a + b}{2}$, so ist $x = \frac{a + b}{2}$.

F. Wie ist das Verfahren, um anzuzeigen, daß algebraische Größen addirt oder subtrahirt werden sollen?

A. Man verbindet bei der Addition die algebraischen Größen durch das Zeichen (+) plus oder mehr. Z. B. $m + n$ oder $a + b + c$.

Ferner bei der Subtraction durch das Zeichen (—) minus oder weniger. Z. B. $m - n$ zeigt an, daß n von m weggenommen werden soll. Eben so auch $(a + b) - (m + n)$; daß die Summe n und m von der Summe a und b abgezogen werden soll.

F. Wie zeigt man an, daß algebraische Größen mit einander multiplicirt werden sollen?

A. Sollen Buchstaben-Größen mit einander multiplicirt werden, so verbindet man sie durch das Zeichen (× oder ·) mal oder multiplicirt. Z. B. $a \times x$ oder $a . x$; gewöhnlich aber werden die Buchstaben-Größen zusammengesetzt, als ax. Im Fall aber zusammengesetzte Größen mit einander multiplicirt werden sollen, schließt man jeden Ausdruck in eine Parenthese ( ).

z. B. $(a + b) \times (a - b)$ oder gewöhnlicher $(a + b)(a - b)$, wodurch sich ergiebt, daß die Summe von a und b mit der Differenz b von a zu multipliciren sey.

F. Was versteht man unter dem Exponenten?

A. Wenn ein Buchstabe oder Ausdruck mehrmals mit sich selbst multiplicirt werden soll, so würde dieser Buchstabe oder Ausdruck mehrmals als Factor im Producte erscheinen, deshalb schreibt man diesen zur Bequemlichkeit und leichtern Uebersicht nur einmal, hängt jedoch rechts oben eine Zahl an, welche anzeigt, wie oft der Buchstabe oder Ausdruck als Factor vorhanden sey und diese Zahl heißt der Exponent. Z. B. $a \times a \times a = aaa = a^3$ wird „a zur dritten" ausgesprochen; eben so $ab \times ac \times ad = aaabcd = a^3bcd$; oder $(a+b)(a+b)c$ kürzer aber $(a+b)^2c$; dieses spricht man „die Summe $a + b$ zur zweiten c" aus.

F. Was versteht man unter einer Potenz oder Dignität?

A. Wenn ein Produkt 2, 3, 4 . . . n gleiche Factoren hat, so nennt man diesen Fac-

tor die 2te, 3te, 4te .... nte Potenz von diesem Factor. Z. B. das Product sey a a oder auch a^2, so ist a^2 die 2te Potenz von a. Man sagt und schreibt aber gewöhnlich nur a^3, b^4, c^2, x^{n-1}, y^m, indem man das Wort Potenz wegläßt. So ist auch noch $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

F. Welche Vorstellung hat man sich von dem Coefficienten zu machen?

A. Soll ein Buchstabe oder Ausdruck mehrmals genommen werden, so zeigt man dies dadurch an, daß vor dem Buchstaben oder Ausdruck eine Zahl gesetzt wird, nach dem Verhältniß, wie oft die Größe genommen werden soll; die vorgesetzte Zahl heißt der Coefficient. Z. B. a b c soll 4 mal genommen werden, so ist es so viel als 4 a b c oder (m + n) ist 5 mal zu nehmen, so giebt es 5 (m + n). Es ist aber nicht nöthig, daß der Coefficient ein Zahlenfactor sey; sondern er kann eben so gut aus einer Buchstabengröße bestehen. Z. B. (a — c) x hier ist a — c der Coeffizient von x.

F. Wird der Exponent und Coeffizient 1 bei den Buchstaben-Größen angegeben?

A. Nein; in der Regel nicht, man müßte denn besondere Gründe dazu haben.

Die Exponenten und Coefficienten darf man aber nicht mit einander verwechseln; denn wenn z. B. $3x$ und x^3 gegeben und $x = 4$ ist, so würde $3x = 3 \times x = 3 \times 4 = 12$ und $x^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ seyn.

F. Sollen Buchstabengrößen durch andere dividirt werden, wie wird dies bezeichnet?

A. Wie in der Zahlenrechnung durch zwei über einander stehende Punkte (:) oder dadurch, daß man den Dividendus über und den Divisor unter einen Strich (—) setzt. Z. B. soll a durch b dividirt werden, so ist $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ oder auch $m - n$ durch $a + b$, so ist wieder $(m - n) : (a + b) = \frac{m - n}{a + b}$. Eben so $\frac{1}{4}(m + n - a) = (m + n - a) : 4 = \frac{m + n - a}{4}$

F. Hat die Ordnung der Theile einer Summe und der Factoren eines Produkts keinen Einfluß auf den Werth der Summe und des Produkts?

A. Nein, denn man mag a + b oder b + a zusammen zählen, oder ferner a b oder b a multipliciren, so wird man bei der Addition gleiche Summen und bei der Multiplication gleiche Produkte erhalten. Doch ordnet man gern die Buchstaben nach der Ordnung im Alphabet, wenn keine Ursache vorhanden ist, welche es verbietet.

F. Haben die Theile, aus welchen die algebraischen Größen zusammen gesetzt sind, keinen besondern Namen?

A. Algebraische Größen, wenn sie nicht mit + und — verbunden sind, werden einfache, eingliedrigt, genannt. Z. B. 8 a x, $\frac{3mn}{a}$. Sind aber die Theile mit + und — verbunden, so nennt man sie mehrnamige, vielgliedrige. Daher heißen die einzelnen Theile: die Glieder der Größe.

F. Was versteht man unter einer Function?

A. Der Werth einer algebraischen Größe hängt von jedem Buchstaben ab, welcher in ihr vorkommt, daher nennt man eine algebraische

Größe $\frac{m - n}{a + b}$ auch eine Function, von den in ihr befindlichen Größen.

F. Was versteht man unter gleichartigen und ungleichartigen, heterogenen Gliedern?

A. Gleichartige Glieder sind diejenigen, welche aus gleichen Buchstaben und diese wieder in sich zu gleichen Potenzen erhoben sind. Bei heterogenen Gliedern findet das Gegentheil statt. Z. B. Gleichartige Glieder sind $5 a^2 x - 3 a^2 x + 7 a^2 x$ Ungleichartige hingegen $m^3 n - 3 m^2 n^2 + a m - c d$.

F. Was versteht man unter entgegengesetzten Größen.

A. Größen von einerlei Art, welche unter solchen Bedingungen gegen einander betrachtet werden können, daß eine die andere entweder ganz oder zum Theil aufhebt. Z. B. Vermögen und Schulden; so sind Schulden ein negatives Vermögen. Entgegengesetzte oder positive und negative Größen kann man daher immer aus dem Gesichtspunkte ansehen, daß sie von einander abgezogen werden sollen, weshalb man die eine mit (+) plus und die andere mit (—) minus

bemerken kann. Diejenige Größe, welche das Zeichen (+) erhält, heißt alsdann die positive, die hingegen, welche das Zeichen (—) bekommt, die negative Größe.

F. Erhält das erste Glied einer algebraischen Größe niemals das Zeichen (+), wie es mit dem Zeichen (—) statt findet?

A. Nein! Man läßt das Zeichen (+) zur Abkürzung weg, weil man das erste Glied, sobald es kein Zeichen vor sich hat, als positiv betrachtet. Steht aber eine negative Größe am Anfange eines algebraischen Ausdrucks, so erhält diese stets das Zeichen (—). So schreibt man a — 3 b, aber nicht + a — 3 b; stets aber wird geschrieben — 3 b + a.

F. Was versteht man unter dem Ausdrucke: Größen nach einem Buchstaben ordnen?

A. Wenn in einer algebraischen Größe die Glieder in einer solchen Ordnung auf einander folgen, daß das Glied, worin die höchste Potenz eines Buchstaben vorkommt, zuerst steht; sodann das Glied folgt, worin die nächst kleinere Potenz desselben Buchstabens vorkommt u. s. f. die Glieder hingegen, in welchen dieser Buch-

stabe nicht enthalten ist, zuletzt stehen. Z. B. $a^3 + a^2 x + ab + c$ hier ist nach a geordnet. $x^3 - ax^2 + bx - c$ hier nach x.

a) Die vier Rechnungsarten in der Buchstabenrechnung.

Addition.

F. Was versteht man unter Addition algebraischer Größen?

A. Nichts anders, als daß die gegebenen Theile in eine Summe gebracht werden sollen. Z. B. $a + a + a$ ist gewiß gleich, $3a$, oder $2ab + 5ab + 7ab = 14ab$ oder auch $-abc - 3abc - 4abc = -8abc$.

F. Wie werden aber algebraische Größen von einerlei Art addirt, wenn sie theils mit dem Zeichen + theils mit — versehen sind?

A. Man rechnet erst alle positive Glieder zusammen und eben so auch die negativen, zieht hierauf die Summen von einander ab; der Rest giebt das Resultat mit dem Zeichen, von welcher Größe etwas übrig bleibt. Z. B. $ax - 3ax$

$+ 9\,ax - 2\,ax = 10\,ax - 5\,ax = 5\,ax$; oder $- 9\,ab + 4\,ab + 2\,ab - 3\,ab - ab = - 13\,ab + 6\,ab = - 7\,ab$

Oder wenn $+ 7\,a = + 7$ Thlr.

$- 3\,a = - 3$ =

so ist $4\,a = 4$ Thlr.

F. Kommen aber in einer algebraischen Größe die Glieder theils von einerlei, theils von verschiedener Art vor, wie wird dann verfahren?

A. Die gleichartigen Glieder werden, nach obigen Beispielen, zusammen gerechnet, die ungleichartigen aber in die Summe, mit ihren dazu gehörigen Zeichen, gesetzt. z. B. $3a - 4b + 6c - m - 2n$ und $- a - 2b + c + m + 6x = 2a - 6b + 7c - 2n + 6x$.

Gewöhnlich aber werden die algebraischen Größen, welche addirt werden sollen, so unter einander gesetzt, daß die gleichartigen unter einander, die ungleichartigen hingegen rechts oder links herausgesetzt werden; z. B. $5\,a^2 b + 3\,ac - c^2 m + 4\,ax^2$ und $5\,c^2 m - a^2 b^2 + ax^2 - 3\,ac$ sollen addirt werden, so ist

$$5\,a^2 b + 3\,ac - c^2 m + 4\,ax^2$$
$$- 3\,ac + 5\,c^2 m + ax^2 - a^2 b^2$$
$$\overline{5\,a^2 b + 4\,c^2 m + 5\,ax^2 - a^2 b^2}$$

In folgenden Beispielen sollen obige Regeln angewendet werden:

1) $$\begin{array}{l} 7c + 3\,ab - ax \\ 3c + ab - 2\,ax \\ \hline 10c + 4\,ab - 3\,ax \end{array}$$

2) $$\begin{array}{l} a^3 - 3\,ab + 5\,c^2 - 9\,a \\ -a^3 + ab + 4\,c^2 + 9\,a \\ \hline -2\,ab + 9\,c^2 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{l} ab + ax \\ -ax + bc + a^2b \\ \hline ab + bc + a^2b \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l} 3\,a^2 + ab^2 - 7\,c \\ -a^2 + c + 3\,ab \\ \hline 2\,a^2 + ab^2 - 6\,c + 3\,ab \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} a^n\,b^2 - a^{m-1}\,c + mn \\ -a^n\,b^2 - 3a^{m-1}\,c + ax \\ \hline -4a^{m-1}\,c + mn + ax \end{array}$$

6) $$\begin{array}{l} \frac{1}{3}\,a^2\,b - \frac{3}{4}\,bc + 3\frac{1}{2}\,c^2 - \frac{1}{5}\,x \\ -4\frac{1}{6}\,a^2\,b + 2\frac{1}{2}\,bc + \frac{1}{5}\,x - ax \\ +\frac{7}{8}\,a^2\,b - 2\frac{3}{5}\,c^2 - 1\frac{1}{2}\,x \\ \hline -2\frac{23}{24}\,a^2\,b + 1\frac{3}{4}\,bc + \frac{9}{10}\,c^2 - 1\frac{1}{2}\,x - ax \end{array}$$

7) $m + n$

$m - n$

$2m$

Aus dem letzten Beispiele ergiebt sich leicht, wie man aus der Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst finden könne. Es sey z. B. die Summe zweier Zahlen = 104 und ihre Differenz = 8 so ist auch:

$m + n = 104$ } Beide Theile dieser Glei-
$m - n = 8$ } chungen addirt;

giebt $2m = 112$ und die Gleichung durch 2 dividirt

so ist $m = \frac{112}{2} = 56$ als die größere Zahl; zieht man diese von der Summe ab, so erhält man 48 als die kleinere Zahl.

Subtraction.

F. Wie werden algebraische Größen von einander abgezogen?

A. Man schreibt die Glieder des Minuendus mit seinem zugehörigen Zeichen und die Glieder des Subtrahendus mit entgegengesetzten Zeichen in eine Größe zusammen, und zwar dergestalt, daß die gleichartigen unter einander

zu stehen kommen; hierauf addire man den Minuendus und den Subtrahendus nach den Regeln der Addition zusammen, die Summe ist alsdann der Rest. Z. B. 7a hiervon 4a abgezogen, giebt 3a; oder — 6c hiervon + 3c abgezogen, giebt — 3c.

Oder auch

+ 7 a	— 6 c
— 4 a	+ 3 c
+ 3 a.	— 3 c.

Man kann auch den Minuendus und Subtrahendus mit den dazu gehörigen Zeichen in eine Größe untereinander schreiben; dann aber muß man die veränderten Zeichen unter die Zeichen des Subtrahendus schreiben und beim Zusammenrechnen darauf Rücksicht nehmen. Z. B.

+ 7 a	— 6 c	+ 6 b	— 4 x	+ 5 m
+ 4 a	— 3 c	+ 8 b	+ 3 x	— 3 m
—	+	—	—	+
+ 3 a	— 3 c	— 2 b	— 7 x	+ 8 m

F. Warum werden beim Subtrahendus die Zeichen geändert und dann addirt?

A. Man erinnere sich nur, daß die Addition und Subtraction entgegengesetzte Rechnun-

gen sind und daß man die Richtigkeit einer verrichteten Subtraction dadurch untersucht, wenn man die Differenz und den Subtrahendus addirt, wodurch der Minuendus wieder erhalten wird. So überzeugt man sich gewiß von der Richtigkeit dieser gegebenen Regel. Z. B.

$$\begin{array}{r} -4\,x \\ +3\,x \\ - \quad \\ \hline -7\,x \\ \hline -4\,x \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} +5\,m \\ -3\,m \\ + \quad \\ \hline +8\,m \\ -3\,m \\ \hline +5\,m \end{array}$$

F. Enthalten Minuendus und Subtrahendus theils gleichartige, theils ungleichartige Größen, wie verfährt man dann?

A. Es werden auch hier, wie bei der Addition, die gleichartigen Glieder unter einander gesetzt und von einander abgezogen; die ungleichartigen Glieder vom Minuendus werden umgeändert mit ihrem wahren Zeichen; die des Subtrahendus hingegen mit entgegengesetzten Zeichen in den Rest gesetzt. Z. B.

$$\begin{array}{llll}
7\,x & -\,a. & & \\
3\,x & & & +\,b. \\
- & & & - \\
\hline
4\,x & -\,a & & -\,b.
\end{array}$$

In folgenden Beispielen sollen die gegebenen Regeln der Subtraction angewendet werden.

$$\begin{array}{lll}
1) & 3\,a & -\,5\,bc \\
 & 2\,a & -\,3\,bc \\
 & - & + \\
\hline
 & a & -\,2\,bc
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2) & -\,8\,x & +\,6\,ab & -\,5\,c \\
 & 2\,x & -\,9\,ab & +\,c \\
 & - & + & - \\
\hline
 & -\,10x & +\,15\,ab & -\,6\,c.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
3) & 2\,mn & -\,ab & +\,x \\
 & 5\,mn & -\,3\,ab & +\,x \\
 & - & + & - \\
\hline
 & -\,3\,mn & +\,2\,ab. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
4) & ax^2 & +\,7\,bc & -\,3\,x. & \\
 & -\,ax & -\,3\,bc & & +\,4\,m. \\
 & + & + & & - \\
\hline
 & 2\,ax^2 & +\,10\,bc & -\,3\,x & -\,4\,m.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
5) & 6\,a^2\,b & -\,3\,a\,x & +\,4\,m^2\,n. \\
 & 4\,a^2\,b & +\,3\,a\,x & \\
 & - & - & \\
\hline
 & 2\,a^2\,b & -\,6\,a\,x & +\,4\,m^2\,n.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
6) & 9y^2 & +7x^{n-1}b & & & \\
 & -3y^2 & +4x^{n-1}b & +7c & -8d \\
 & + & - & - & + \\
\hline
 & 12y^2 & +3x^{n-1}b & -7c & +8d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
7) & m & +n \\
 & m & -n \\
 & - & + \\
\hline
 & & 2n
\end{array}
$$

Aus diesem letzten Beispiele ergiebt sich, daß, wenn man die Differenz von der Summe zweier Zahlen abzieht, und den Rest halbirt, die kleinere von den beiden Zahlen erhält. Z. B. die Summe sei 104 und die Differenz 8, so ist $\frac{104 - 8}{2} = \frac{96}{2} = 48$ als die kleinere Zahl.

Multiplication.

F. Welche Regeln hat man bei der Multiplication algebraischer Größen zu beobachten?

A. Daß man die Coefficienten wie gewöhnlich multiplicirt, die Buchstaben zusammen stellt. Kommen hierbei gleiche Buchstaben vor, so wird nur einer geschrieben und die Summe

der Exponenten der gleichen Buchstaben rechts oben angehangen. Gleiche Zeichen geben ein positives und ungleiche ein negatives Product. Z. B. $2\,ab \times 3\,a = 6\,a^2 b$; $5\,a^2\,b^2 \times 2\,a^3\,bc = 10\,a^5\,b^3\,c$; $-\,3\,m^2 \times -\,2\,mn = +\,6\,m^3\,n$; $+\,5\,ax \times -\,3\,ab = -\,15\,a^2\,bx$; $-6\,x^3 y \times +\,2\,xy = -\,12\,x^4\,y^2$.

F. Warum werden die Coefficienten mit einander multiplicirt?

A. Man stelle sich nur vor, als sey $2\,ab \times 3\,a$ in Zahlen gegeben, so ist gewiß, wenn $a = 7$ und $b = 5$, der Ausdruck gleich $2.\,7.\,5.\,3.\,7. = 2.\,3.\,7.\,5.\,7. = 6.\,7.\,7.\,5. = 6.\,7.^2\,5. = 6\,a^2 b$.

F. Aus welcher Ursache aber werden die Exponenten von den gleichen Buchstaben addirt?

A. Von den beiden Factoren $a^3\,b^2$ und $a^2\,b$ würde das Product $a^5\,b^3$ seyn; es ist aber auch $a^3\,b^2 = aaabb$ und $a^2\,b = aab$; daher $a^3\,b^2.\,a^2\,b = aaabb.\,aab = aaaaabbb = a^5\,b^3$.

F. Daß zwei positive Factoren ein positives Product geben, ist wohl keinem Zweifel

unterworfen; aber warum geben zwei negative Factoren auch ein positives Product?

A. Der Beweis, daß $-a \times -b = +ab$ sey, würde sich kurz auf folgende Art geben lassen:

Es ist $a = 2a - a$
multiplicirt mit $-b = -b$

$-ab = -2ab + ab$. Da hier beide Producte einander gleich seyn müssen, so kann $-a \times -b$ nicht $-ab$ geben, weil dann nicht $-ab = -2ab - ab = -3ab$ ist, sondern $-ab = -2ab + ab$. Hier hebt ab in $-2ab$ ein $-ab$ auf, und es bleibt noch $-ab$ übrig, welches ganz gewiß dem ersten $-ab$ gleich ist. Mithin geben gleiche Zeichen ein positives Product.

F. Kann es auf diese Weise eben so bewiesen werden, daß verschiedene Zeichen ein negatives Product geben?

A. Ja, man stelle sich
$+a = +2a - a$ vor und multiplicire beide
Theile mit $+b = +b$ so erhält

man $+ab = +2ab - ab$, wäre hier $-a \times +b = +ab$ so
müßte auch $+ab = +2ab + ab = +3ab$

seyn, welches aber geradezu unmöglich ist; nimmt man aber $- a \times + b = - ab$ an, so ist auch richtig:

$$+ ab = + 2 ab - ab = + ab.$$

Zahlenbeispiele werden die beiden letzten Puncte ebenfalls bestätigen. Z. B.

Es sey $+ 6 = + 10 - 4$
multiplicirt mit $-2 = - 2$

$$-2 \times +6 = +10 \times -2 \text{ und } -4 \times -2.$$

also ist auch $- 12 = - 20 + 8 = - 12.$

Eben so; $+ 6 = + 10 - 4.$
$+ 2 = + 2.$

$$+12 = +20 - 8 = +12.$$

F. Wie werden zusammengesetzte, algebraische Größen durch einfache und zusammengesetzte mit einander multiplicirt?

A. Man muliplicirt mit der einfachen Größe alle Glieder der zusammengesetzten; ob man hierbei rechts oder links zu multipliciren anfängt, ist einerlei; die erhaltenen Producte

werden darunter gesetzt. Das Multipliciren zusammengesetzter Größen geschiehet eben so, indem man mit jedem einzelnen Gliede der einen alle Glieder der andern Größe multiplicirt und die ähnlichen Glieder im Producte addirt. Z. B.

$$\begin{array}{ll} & 3a^2x - bc + d \text{ multiplicirt} \\ \text{mit} & 2ab \\ \hline & 6a^3bx - 2ab^2c + 2abd. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (a+b)(a+b) = & a + b \\ & a + b \\ \hline & a^2 + ab. \\ & \quad + ab + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Oder } 7bc - cx^2 + 3a \\ - 5ax \\ \hline - 35abcx + 5acx^3 - 15a^2x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{oder} & a + b \\ & a - b \\ \hline & a^2 + ab \\ & \quad - ab - b^2 \\ \hline & a^2 - b^2. \end{array}$$

In folgenden Beispielen werden die Multiplications-Regeln angewendet:

1)
$$\begin{array}{r} 3\,ab + 6\,bc \\ 2\,ac \\ \hline 6\,a^2\,bc + 12\,abc^2 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} -\,3\,x^2 - 4\,ab \\ -\,4\,cx \\ \hline 12\,cx^3 + 16\,abcx \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} -\,7\,xy + yz - xz \\ 2\,x \\ \hline -\,14\,x^2\,y + 2\,xyz - 2\,x^2\,z \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 5\,a^2 - 2\,bc \\ 3\,ab + c \\ \hline 15\,a^3\,b - 6\,ab^2\,c + 5\,a^2\,c - 2bc^2 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 3\,a^2\,c^2 - 4\,ac^2 \\ 5\,ab - 2\,ax \\ \hline 15\,a^3\,bc^2 - 20\,a^2\,bc^2 - 6\,a^3\,c^2\,x + 8\,a^2\,c^2\,x \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} a + b - c \\ a + b + c \\ \hline a^2 + ab - ac. \\ \quad + ab \quad + b^2 - bc \\ \quad\quad + ac \quad + bc - c^2. \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2 - c^2. \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} a^n x^2 - ab + c^2 x \\ a\, c^n \\ \hline a^{n+1} c^n x^2 - a^2 bc^n + ac^{n+2} x. \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} x^{m-2}\, b - a^{x-1} \\ x^{m+1}\, c - ab \\ \hline x^{2m-1}\, bc - a^{x-1} x^{m+1} c - ab^2 x^{m-2}. \\ + a^x b. \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{l} 3\, a^{n-1}\, b - 2\, axm \\ 4\, ac \quad + 5\, axm-1 \\ \hline 12\, a^n bc - 8\, a^2 cxm + 15\, a^n bx^{m-1} \\ \quad - 10\, a^2 x^{2m-1}. \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{l} m^2 + mn + n^2 \\ m - n \\ \hline m^3 + m^2 n + mn^2 \\ \quad - m^2 n - mn^2 - n^3 \\ \hline m^3 - n^3. \end{array}$$

Aus dem letztern Beispiele erkennt man, daß eine jede Größe von der Form $x^m + x^{m-1} y + x^{m-2} y^2 + x^{m-3} y^3 \ldots\ldots x y^{m-1} + y^m$ mit $x - y$ multiplicirt $x^{m+1} - y^{m+1}$ zum Producte gebe, weil sich die übrigen Glieder der Partialproducte gegenseitig aufheben.

Man kann daher umgekehrt schließen, daß $a^3 - b^3$ durch die Multiplication der beiden Factoren $(a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$ entstanden sey. Oder auch $a^2 - b^2$ aus $(a + b)\ (a - b)$; $(x^2 - 1)$ aus $(x + 1)\ (x - 1)$.

Division.

F. Wenn gleichartige, einfache algebraische Größen in einander dividirt werden sollen, welche Regeln hat man zu beobachten?

A. Erstlich bestimme man das Zeichen, welches der Quotient erhalten soll. Es geben auch hier gleiche Zeichen einen positiven und ungleiche Zeichen einen negativen Quotienten. Z. B. $8a : 2a = 4$; eben so $-8a : -2a = +4$; und auch $-8a : +2a = -4$; oder $+8a : -2a = -4$. Daß $+2a$ in $+8a$ so wie $-2a$ in $-8a$ wirklich $+4$ mal enthalten sey,

ist leicht einzusehen; daß aber $+ 2a$ in $- 8a$ den Quotienten $- 4$ giebt, wird dadurch erwiesen, wenn man $- 8a = - 12a + 4a$ setzt und beide

$$
\begin{array}{ll}
\text{Theile durch} & \underline{+ 2a = + 2a \quad \text{dividirt.}} \\
\text{Man erhält dann} & - 4 = - 6 + 2 = - 4.
\end{array}
$$

Eben so

$$
\begin{array}{l}
+ 8a = + 12a - 4a \\
\underline{- 2a = - 2a \qquad\qquad\quad} \\
- 4 = - 6 + 2 = - 4.
\end{array}
$$

Hieraus wird man abnehmen, daß die Coefficienten wie gewöhnliche Zahlen in einander dividirt wurden, die Buchstaben aber, indem sie gleiche Exponenten haben, sich gegenseitig aufheben und daher im Quotienten wegfallen. Sind aber bei gleichen Buchstaben die Exponenten verschieden, so wird der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus abgezogen. Enthält hingegen der Dividendus Buchstaben, welche der Divisor nicht hat, so werden diese umgeändert in den Quotienten gesetzt; hat ferner der Divisor Buchstaben, welche nicht im Dividendus enthalten sind, so kommen diese als Nenner in den Quotienten. Z. B. $10 a^3 bc : 2ab = 5a^2c$;

$$9x^2 : 3ax = \frac{3x}{a};$$

$$14a^3x^2 : -2ab = -\frac{7a^2x^2}{b};$$

$$-4am : 3an = -\frac{4m}{3n};$$

$$-7a^4b^2 : -2a^3b = \frac{7ab}{2};$$

Um sich von der Richtigkeit dieser gegebenen Regeln zu überzeugen, betrachte man sie gleich wie in der Zahlenrechnung den Divisor und Quotienten, als die beiden Factoren des Dividendus, und durch die Multiplication wird man den Dividendus erhalten.

F. Wie werden aber die Quotienten bestimmt, wenn bei gleichen Buchstaben der Exponent im Divisor größer ist, als der Exponent im Dividendus?

A. Da der Divisorexponent von dem Dividendusexponenten abgezogen werden soll, um den Quotienten zu bestimmen, so wird gewiß $a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$ seyn. Oder auch:

$$12a^2b : 3a^3 = 4a^{-1}b;\quad 7ax : 3a^3b = \frac{7a^{-2}x}{3b}.$$

F. Kann man die Buchstaben, welche zu einer negativen Potenz erhoben werden sollen, nicht auf eine andere Art ausgedrückt darstellen?

A. Ja, man gebe den beiden Größen, welche in einander dividirt werden sollen, nur die Bruchform und kürze dann Zähler und Nenner ab, so erhält man z. B.

$a^3 : a^7 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$; od. $12a^2b : 3a^3 = \frac{12a^2b}{3a^3} = \frac{4b}{a}$.

Hieraus ist zu ersehen, daß man die Buchstaben, welche negative Exponenten haben, nur als Nenner zu setzen hat. Eben so ist auch $x^0 = 1$; denn $x^2 : x^2 = x^{2-2} = x^0 = 1$. Kommen aber im Nenner Buchstaben mit negativen Exponenten vor, so setzt man sie in den Zähler des Bruchs, indem man seinen negativen Exponenten in einen positiven verwandelt.

F. Wie werden zusammengesetzte Größen durch einfache dividirt?

A. Man dividire jedes einzelne Glied der erstern durch die einfache Größe. Z. B. $6a^3b - 3bm + 5c^2 : 2ab$

$$= 3a^2 - \frac{3m}{2a} + \frac{5c^2}{2ab};$$

$$7ax + 3bc - m : 4ab = \frac{7x}{4b} + \frac{3c}{4a} - \frac{m}{4ab};$$

$$-5a^2x^2 + 4bc - 9c^2 :$$

$$-7a^3b^2c = \frac{5x^2}{7ab^2c} - \frac{4}{7a^3b} + \frac{9c}{7a^3b^2}.$$

F. Nach welchen Regeln werden zusammengesetzte durch zusammengesetzte Größen dividirt?

A. Erstlich ordne man sowohl den Dividendus als den Divisor nach einerlei Buchstaben, dann bestimme man aus den ersten Gliedern beider Größen das erste Glied im Quotienten; hierauf multiplicire man dieses mit dem ganzen Divisor und setze das Product so, daß gleiche Größen, ohne auf die Coefficienten und Zeichen zu sehen, unter einander zu stehen kommen. Endlich ziehe man die Größen von einander ab, und so fährt man fort, bis die ganze Größe dividirt ist. Z. B.

$$a^5 - a^3 + 6a^2 : a^2 + 2a = a^3 - 2a^2 + 3a;$$

$$a^5 + 2a^4$$

$$-$$

$$-2a^4 - a^3$$

$$-2a^4 - 4a^3$$

$$+ \quad +$$

$$3a^3 + 6a^2$$

$$3a^3 + 6a^2$$

$$0$$

$$a^3 - b^3 : a - b = a^2 + ab + b^2;$$

$$a^3 - a^2 b$$

$$\underline{+\qquad\qquad}$$

$$a^2 b - b^3$$

$$a^2 b - a b^2$$

$$\underline{-\quad +\qquad}$$

$$a b^2 - b^3$$

$$a b^2 - b^3$$

$$\underline{-\quad +\qquad}$$

$$0$$

F. Sobald aber bei einer solchen Division ein Rest verbleibt, wie verfährt man mit diesem?

A. Er wird, wie in der Zahlenrechnung, mit dem Divisor als Bruch an den Quotienten gehangen. Z. B.

$$10a^2 b^2 + 6abc - 20a^2 bx - 12acx + nm : 2b - 4x$$

$$= 5a^2 b + 3ac + \frac{mn}{2b - 4x}$$

$$10 a^2 b \qquad -20a^2 bx$$

$$\underline{-\qquad\qquad +\qquad}$$

$$6abc \qquad - 12acx$$

$$\underline{-\qquad\qquad +\qquad}$$

F. Wenn die Glieder zweier Größen nicht gleichartig sind; wie werden sie in einander dividirt?

... In diesem Falle zeigt man es nur an, daß die eine Größe durch die andere zu dividiren sey. Z. B. $ab : cx = \frac{ab}{cx}$; $a + b : m - n = \frac{a + b}{m - n}$; $2ab - 2x : 3y + 5z = \frac{2ab - 2x}{3y + 5z}$

b) Rechnungsarten mit algebraischen Brüchen.

Reduction durch das Aufheben der Brüche.

F. Wie werden algebraische Brüche abgekürzt?

A. Eben so wie Zahlenbrüche; man sucht einen Factor auf, mit welchem man den Zähler als auch den Nenner ohne Rest dividiren kann. Z. B. in dem Bruche $\frac{ax + x}{bx - cx}$ ist in allen Gliedern x; dividirt man daher Zähler und Nenner durch x, so erhält man $\frac{a + 1}{b - c}$. Man hätte aber auch die Rechnung so anordnen können, daß man den gemeinschaftlichen Factor vor die Parantheſe, in welcher sich der Quotient befindet gesetzt, und dann die gleichen Factoren im Zähler und Nenner gegenseitig ausgestrichen und weggelassen hätte. So

würde obiges Beispiel folgendermaßen behandelt werden, als:

$$\frac{ax + x}{bx - cx} = \frac{x(a + 1)}{x(b - c)} = \frac{a + 1}{b - c}$$

Daß eine Größe, welche vor einer Parenthese steht, so anzusehen ist, daß diese mit der Größe in der Parenthese zu multipliciren sey, wird wohl keiner weitern Auseinandersetzung bedürfen.

Uebrigens soll hier noch in einigen Beispielen gezeigt werden, wie man bei Abkürzung der Brüche im Allgemeinen verfahren müsse.

1) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{12ab + 9a^2b} = \frac{3ab(ab - 2b^2)}{3ab(4 + 3a)} = \frac{ab - 2b^2}{4 + 3a}$;

2) $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ Daß hier $x^2 - 1$ entstanden ist aus $(x + 1) \times (x - 1)$ erhellt klar, wenn man den letzten Ausdruck wirklich multiplicirt; daher ist auch:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)} = x - 1$$

3) $\frac{nx^2 - n}{ax + a} = \frac{n(x^2 - 1)}{a(x + 1)} = \frac{n(x + 1)(x - 1)}{a(x + 1)} = \frac{n(x - 1)}{a}$;

4) $\frac{14a^2 - 7ab}{10ac - 5bc} = \frac{7a(2a - b)}{5c(2a - b)} = \frac{7a}{5c}$;

5) $\frac{a^3b^3 + c^3x^3}{a^2b^2 - c^2x^2} = \frac{(ab + cx)(a^2b^2 - abcx + c^2x^2)}{(ab + cx)(ab - cx)}$

$= \frac{a^2b^2 - abcx + c^2x^2}{ab - cx}$

6) $\frac{6ac + 9bc - 5c^2}{12adf + 18bdf - 10cdf} = \frac{c(6a + 9b - 5c)}{2df(6a + 9b - 5c)} = \frac{c}{2df}$

Algebraische Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, dieselben zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren.

F. Wie verfährt man, um Brüche auf gleiche Benennung zu bringen?

A. So wie bei Zahlen-Brüchen, mit Berücksichtigung der Regeln der Buchstabenrechnung. Z. B.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd};$$

$$\frac{3ax + 2c}{ab} + \frac{4ac - 5bd}{bc} = \frac{3abcx + 2bc^2}{ab^2c}$$

$$+ \frac{4a^2bc - 5ab^2d}{ab^2c};$$

$$\frac{5ab}{3c} - \frac{2ax}{d} = \frac{5abd}{3cd} - \frac{6acx}{3cd};$$

$$\left(\frac{2ac-3ax}{2b}\right)-\left(\frac{4ax-3bc}{a}\right)=\left(\frac{2a^2c-3a^2x}{2ab}\right)$$
$$-\left(\frac{8abx-6b^2c}{2ab}\right)$$

Eben so richtet man auch algebraische Brüche ein, z. B.

$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$; $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$; $3a+\frac{5b}{3d}=\frac{9ad+5b}{3d}$; $4x-\frac{b}{p}=\frac{4xp-b}{p}$.

F. Wie werden ungleichbenannte Brüche addirt und subtrahirt?

A. Erstlich bringt man sie auf gleiche Benennung, dann addirt oder subtrahirt man die gleichartigen Glieder; die übrigen bleiben aber mit ihren Zeichen ungeändert. Z. B.

$$\frac{ax}{c}+\frac{ad}{b}=\frac{abx+adc}{bc};$$

$\frac{2ax}{c}-\frac{ax}{c}=\frac{ax}{c}$; $\frac{ab}{c}+\frac{cd}{b}=\frac{ab^2+c^2d}{bc}$;

$\frac{3a^2b^2}{d}-\frac{2x}{c}=\frac{3a^2b^2c-2dx}{cd}$.

F. Was hat man bei der Multiplication und Division algebraischer Brüche zu beobachten?

A. Dasselbe wie bei den Zahlen-Brüchen;

In dem ersten Falle multiplicirt man auch Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Kann man aber vor der Multiplication abkürzen, so muß es geschehen. Z. B.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{ab}{c} \times \frac{cd}{b} = ad;$$

$$\frac{3ab}{2c} \times 5a = \frac{15a^2b}{2c}; \quad \frac{2x}{a} \times - \frac{3c}{b} = - \frac{6cx}{ab};$$

$$-5c \times - \frac{2a}{b} = \frac{10ac}{b}.$$

In dem zweiten Falle wendet man den Divisorbruch um und verwandelt die Division in eine Multiplication. Z. B.

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{cb};$$

$$\frac{2ab}{c} : - \frac{3x}{2d} = \frac{2ab}{c} \times - \frac{2d}{3x} = - \frac{4abd}{3cx}.$$

Zweites Kapitel.

Von den einfachen Gleichungen.

F. Was versteht man unter einer einfachen Gleichung?

A. Die Verbindung zweier gleichen, aber auf verschiedene Weise ausgedrückter Größen,

durch das Gleichheitszeichen. In so fern die unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vorkommt; z. B. wenn x die unbekannte Größe ist, so ist $ax - b^2 = cx + d$ eine einfache Gleichung. Eben so auch: $xy + x + y = a^2 + b$.

F. Wie nennt man die beiden Ausdrücke, welche die Gleichung bilden?

A. Die Theile der Gleichung. Besteht ein solcher Theil aus Größen, die durch + und — mit einander verbunden sind, so nennt man diese die Glieder. So ist ax das eine und — b^2 das andere Glied des ersten Theils der Gleichung $ax - b^2 = cx + d$.

F. Was versteht man unter einer identischen Gleichung?

A. Wenn die beiden Theile einer Gleichung einerlei Glieder ausmachen und diese auf gleiche Art zusammengesetzt sind, so daß beide Theile aus gleichen Größen bestehen. Z. B. $\frac{x^2 - b}{2} = \frac{x^2 - b}{2}$; hier heben sich alle Glieder gegenseitig auf und man erhält keine Auflösung.

F. Auf welche Weise wird in einer Gleichung der Werth für die unbekannte Größe gefunden?

A. Man sucht die unbekannte Größe von den bekannten zu trennen, so daß die erstere positiv, ohne Factor und Nenner, in der ersten Potenz den einen Theil der Gleichung ausmacht.

F. Wie kann dies geschehen?

A. Dadurch, daß man die unbekannten Größen in den einen Theil und die bekannten in den andern bringe.

F. Nach welcher Regel kann ein Glied aus dem einen in den andern Theil übergetragen werden?

A. Man stelle sich die gegebene Gleichung $dx + m = ac - b$ vor; zieht man hier von beiden Theilen der Gleichung m ab; so ist

$$\begin{array}{lcl} dx + m & = & ac - b \\ + m & & + m \\ - & & - \\ \hline dx & = & ac - b - m. \end{array}$$

Oder was dasselbe ist, man trage die Glieder aus dem einen in den andern Theil, mit entgegengesetzten Zeichen.

Oder $dx + m = ac - b$

so ist auch $dx + m + b = ac.$

Trägt man daher alle Glieder in einen Theil, so wird der andere Null seyn. Es ist

wieder $dx + m = ac - b$

daher $dx + m + b - ac = 0$

F. Wie kommen aber die Nenner in einer Gleichung in Wegfall?

A. Man multiplicire alle Glieder der Gleichung durch die Nenner. Z. B.

$$\frac{x - a}{2} = b + c$$

so ist $x - a = 2b + 2c$

Oder: $\frac{a + cx}{a + b} - c = m$

so ist auch $a + cx - ac - bc = am + bm$

F. Die unbekannte Größe erscheint aber in den Gleichungen öfters noch mit einem Coefficienten; wie wird dieser entfernt, damit die unbekannte Größe ganz allein in dem einen Theile der Gleichung erhalten werde?

A. Dadurch, daß man alle Glieder durch ihn dividirt. Z. B.

$$dx = ab + c - m$$

$$x = \frac{ab + c - m}{d}$$

Oder: $n - \frac{m}{x} = \frac{a}{x} - b$ Durch Multiplication mit x

$nx - m = a - bx$

$nx + bx = a + m$ Durch Uebertragung der Glieder.

$(n + b)x = a + m$ Factorenzerfällung.

$x = \frac{a + m}{n + b}$ Durch Division mit $n + b$.

F. Ist es gleichgültig, auf welche Seite die unbekannte Größe gebracht wird?

A. Ja! Indeß bringt man sie gerne auf die linke Seite, um den Werth für die unbekannte Größe bequemer schreiben zu können, zumal wenn dieser aus mehrerern Gattungen besteht.

F. Hierbei wird es sich aber öfters ereignen, daß die unbekannte Größe negativ erscheint; wie würde man demnach verfahren müssen, um sie positiv zu erhalten?

A. In einer jeden Gleichung kann man auf einmal alle Zeichen ändern, ohne die Rich-

tigkeit zu stören. Z. B. Wenn $-x = -a$ ist, so ist auch $x = a$.

Oder wenn $-x = ab - c$, so ist auch $x = c - ab$.

Setzt man $c = 12$, $a = 3$, $b = 2$

so ist $-x = 2 . 3 - 12$

$-x = 6 - 12$

$-x = -6$

Oder: $x = 12 - 2 . 3$

$x = 12 - 6$

$x = 6$

F. In welcher Ordnung würde die Auflösung oder Reduction der Gleichungen erfolgen müssen, um auf dem kürzesten Wege zur Endgleichung zu gelangen?

A. 1) Haben alle Glieder der Gleichung einen gemeinschaftlichen Theiler, so dividirt man diese durch ihn. Z. B.

$ax^2 - bx = cx$ durch x dividirt

giebt $ax - b = c$

2) Kommen Nenner in der Gleichung vor, so entferne man diese, indem alle Glieder mit dem Nenner multiplicirt werden. Z. B.

$\frac{x+a}{b} - c = d$ durch Multiplication mit b

giebt $x + a - bc = bd$

3) Bringt man die unbekannten Größen, wenn sie auch noch mit bekannten, durch die Multiplication verbunden sind, in den einen Theil und die bekannten in den andern Theil der Gleichung. Z. B.

$ax - c = bx + d$ durch Uebertragung

giebt $ax - bx = c + d$

4) Kommt die unbekannte Größe in mehrern Gliedern vor, so zerfällt man diese in ihre Factoren. Z. B.

$ax - bx = c + d$ durch Factorenzerfällung

giebt $(a - b)x = c + d$

5) Endlich entferne man den Coefficienten oder Factor von x, indem alle Glieder der Gleichung durch ihn dividirt werden. Z. B.

$(a - b)x = c + d$ durch Division mit $a - b$

giebt $x = \frac{c + d}{a - b}$

In folgenden Gleichungen sollen die gegebenen Regeln der Reduction angewendet werden:

1) $3x - 6 + 2 = 5 - 3 + x$

$3x - x = 5 + 6 - 3 - 2$ durch Uebertragung.

$2x = 11 - 5 = 6$

$x = \frac{6}{2} = 3$ durch Division mit 2.

2) $9x^2 - 5x = 6x^2$ durch Division mit dem Factor x

$9x - 5 = 6x$

$9x - 6x = 5$ durch Uebertragung der Glieder.

$3x = 5$ durch Division mit dem Coefficienten 3

$x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

3) $\frac{3x}{4} + 3 = \frac{7x}{3} - 5$ durch Multiplication mit dem Nenner 4.

$3x + 12 = \frac{28x}{3} - 20$: : : : : : 3.

$9x + 36 = 28x - 60$ durch Uebertragung.

$9x - 28x = -60 - 36$

$-19x = -96$ durch Aenderung der Zeichen.

$19x = 96$ durch Division

$x = \frac{96}{19} = 5\frac{1}{19}.$

4) $\frac{ax}{b} - c = x + d$ durch Multiplication mit b.

$ax - bc = bx + bd$ durch Uebertragung.

$ax - bx = bc + bd$ durch Factorenzerfällung beider Theile.

$(a-b)x = b(c+d)$ durch Division mit dem Coefficienten $a - b$.

$$x = \frac{b\,(c+d)}{a-b}$$

5) $3(x-5)+7=4$ durch Multiplication des Factors 3 mit den in der Parenthese befindlichen $x - 5$.

$3x-15+7=4$

$3x=4+15-7$ durch Uebertragung.

$3x = 12$ durch Division.

$x = \frac{12}{3} = 4$

6) $\frac{\frac{3x}{4} - 10}{2} - x = -8$ durch Division der 2 in seinen Zähler $\frac{3\,x}{4} - 10$.

$\frac{3x}{8} - 5 - x = -8$ durch Multiplication.

$3x - 40 - 8x = -64$

$3x - 8x = -64 + 40$ durch Uebertragung.

$-5x = -24$

$5x = 24$

$x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ durch Division.

F. Wie werden die Gleichungen aus den Aufgaben construirt?

A. Erstlich bezeichne man die unbekannten Gegenstände, nach welchen gefragt wird, durch die Buchstaben x, y, z u. s. w.; hierauf bringe man diese nach den Bedingungen der Aufgabe verbunden mit den gegebenen Zahlengrößen oder durch die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g u. s. w. womit die bekannten Größen bezeichnet werden, dergestalt in Rechnung, als wenn es schon bekannt wäre, welchen Werth die unbekannten Größen hätten. Auf diese Weise erforscht man zwei auf verschiedene Art zusammengesetzte Ausdrücke, welche einander am Werth gleich zu achten sind und verbindet diese durch das Gleichheitszeichen. Doch muß hierbei die unbekannte Größe wenigstens in einem Ausdrucke als Function vorkommen.

a) Auflösung einfacher Gleichungen von Aufgaben, mit einer unbekannten Größe.

F. 1) Jemand wird gefragt: wie viel Geld er in Kasse habe? Er antwortet: wenn ich

zu dem Einfachen das Doppelte und das Dreifache hinzuzähle, so habe ich gerade 108 Thlr. Wie viel besaß er?

A. Nimmt man an, daß er x Thlr. in seiner Kasse habe, so ist das Doppelte 2 x Thlr. und Dreifache 3 x Thlr.:

Daher ist $x + 2x + 3x = 108$ Thlr.

$$6x = 108$$

$$x = \frac{108}{6} = 18 \text{ Thlr.}$$

hatte er in seiner Kasse.

F. 2) A fragt B wie alt er sey? B giebt zur Antwort: wenn Du die Hälfte meines Alters zum ganzen Alter zählst und von dieser Summe $\frac{1}{4}$ meines Alters subtrahirst, so zähle ich 20 Jahr. Nun sage: wie alt ich jetzt bin?

A. x Jahre war der Befragte; so ist die Hälfte $\frac{x}{2}$ und das Viertel $\frac{x}{4}$. Mithin ist die Gleichung:

$$x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 20$$

$$4x + 2x - x = 80$$

$$6x - x = 80$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5} = 16 \text{ Jahr.}$$

F. 3) Man hat zweierlei Korn, wovon das Viertel des bessern 20 Gr. und vom schlechtern 14 Gr. kostet. Es sollen beide Sorten so vermischt werden, daß von dieser Mischung das Viertel um 18 Gr. verkauft werden kann; wie viel ist von jeder Sorte zu nehmen?

A. x Theile von der bessern Sorte und (1 — x) Theile von der schlechtern; es wird hier das Verhältniß nur von einem Ganzen gesucht.

Mithin kosten x Theile 20 x Gr. und (1 — x) Theile (14 — 14 x) Gr. Es ist demnach auch $20x + 14 - 14x = 18$ Gr.

$$6x = 4$$

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$ des bessern und

$\frac{1}{3}$ = schlechtern.

F. 4) Man soll von zweierlei Wein, von denen die Kanne a Gr. und b Gr. kostet, A Kannen zu c Gr. mischen; wie viel hat man von beiden Sorten zu nehmen?

A. Nimmt man von der ersten Sorte x Kannen, so bleiben für die zweite Sorte A — x Kannen übrig. Der Werth der x Kannen

ist ax Gr. und der Werth der $A - x$ Kannen $(Ab - bx)$ Gr. Beide Werthe müssen aber auch zusammengenommen dem Werthe der gemischten Kannen Ac Gr. gleich seyn;

daher ist $ax + Ab - bx = Ac$

$$(a - b)x = A(c - b)$$

$$x = \frac{A(c - b)}{a - b} = \text{den Kannen,}$$

welche von der bessern Sorte zu nehmen sind.

Mithin sind von der zweiten Sorte zu nehmen

$$A - x = A - \frac{A(c - b)}{a - b} = \frac{A(a - b) - A(c - b)}{a - b}$$

$$= \frac{A(a - c)}{a - b} \text{ Kannen.}$$

F. 5) Eine Zahl zu finden, die, mit ihrer eignen Hälfte vermehrt, 12 zur Summe giebt?

A. Die zu suchende Zahl sey x, und ihre eigne Hälfte $\frac{x}{2}$; daher ist $x + \frac{x}{2} = 12$

$$3x = 24$$

$$x = 8 \text{ die gesuchte Zahl.}$$

F. 6) Es soll eine Summe Geld unter eine Anzahl Personen getheilt werden. Giebt man jeder 6 Thlr., so bleiben 2 Theile übrig; erhält aber jede 7 Thlr., so bekommt die eine

nichts. Wie viel Personen waren es und wie groß war die zuvertheilende Summe?

A. x Personen nehmen Antheil; erhält jede 6 Thlr., so bekommen alle 6x Thlr.; da aber 2 Theile übrig bleiben, so ist die zuvertheilende Summe $6x + 12$ und so auch $7x - 7$. Es ist daher $7x - 7 = 6x + 12$

$$x = 19 \text{ Personen}$$

und $19 \times 6 + 12 = 126$ Thlr. war die zu vertheilende Summe.

F. 7) Wenn bisher jeder Waldbesitzer den 9. Theil des Ertrags zu kontribuiren hatte, und nun bei einem außerordentlichen Bedürfniß des Staates den 7. Theil davon bezahlen muß; um wie viel wird der Preis des Holzes zu erhöhen seyn, damit die vorige Waldrevenüe beibehalten wird?

A. Der anfängliche Waldpreis sey a und die Revenüe $a - \frac{a}{9}$. Erhöht man den anfänglichen Waldpreis um x, so ist dieser dann $a + x$ und die Revenüe $(a + x) - \frac{a + x}{7}$, welche der anfänglichen gleich ist.

Mithin $(a+x) - \frac{a+x}{7} = a - \frac{a}{9}$

$54x = 2a$

$x = \frac{a}{27}$, um welches der Waldpreis zu erhöhen ist.

F. 8) Bei jeder Taschenuhr steht der Stunden- und Minutenzeiger Mittags um 12 Uhr gerade über einander. In welcher Zeit werden sie wieder gerade über einander stehen? und wie oft innerhalb 12 Stunden?

A. Wenn der Stundenzeiger überhaupt $5' + x$ Minuten braucht, während der Minutenzeiger $60 + 5 + x$ zurücklegt, so verhält sich auch

$5 : 60 = x : (5 + x)$

$60x = 25 + 5x$

$x = \frac{5}{11}$ Minuten. Daher stehen die beiden Zeiger in 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minute wieder gerade übereinander, und in 12 Stunden geschieht dieses 11 mal.

b) Auflösung zusammengehörender einfacher Gleichungen von Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen.

F. Wie werden Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen aufgelöst?

A. Man sucht so viel Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe, als unbekannte Größen darinn vorkommen; dann reducirt man die Gleichungen so, daß für jede unbekannte Größe zwei Ausdrücke erhalten werden, die man dann wieder einander gleich setzt und so fortfährt, bis man für eine unbekannte Größe einen Ausdruck erhält, der einzig und allein aus bekannten Größen besteht.

F. Wenn man nun den Werth für eine unbekannte Größe gefunden hat, wie werden die Werthe für die übrigen gefunden?

A. Man setzt den gefundenen Werth statt der unbekannten Größe in eine Gleichung, so daß dadurch eine andere unbekannte Größe sich daraus entwickeln läßt. Z. B. Aus der Summe 104 und der Differenz 8 zweier Zahlen, die Zahlen selbst zu finden, so ist:
wenn x die große Zahl und y die kleine bedeutet.

$$x + y = 104;\quad x - y = 8$$

giebt $x = 104 - y$ u. $x = 8 + y$ beide Gleichungen so ist auch $8 + y = 104 - y$ auf x reducirt.

und $2y = 104 - 8$

$y = \frac{96}{2} = 48$ als die kleinere Zahl.

Es ist aber auch $\dfrac{x = 104 - y}{x = 104 - 48 = 56}$

als die größere Zahl.

Oder bei drei Gleichungen

$$\frac{x + y = 10}{x = 10 - y};\quad \frac{y + z = 23}{y = 23 - z};$$

$$\frac{x + z = 19}{x = 19 - z};$$

$$\frac{\dfrac{10 - y = 19 - z}{- y = 9 - z}}{y = z - 9};$$

$$\frac{\dfrac{z - 9 = 23 - z}{2z = 23 + 9 = 32}}{z = \frac{32}{2} = 16};$$

$$\frac{y = 23 - z}{y = 23 - 16 = 7};\quad \frac{x = 10 - y}{x = 10 - 7 = 3};$$

F. Was heißt Gleichungen durch Substitution eliminiren?

A. Wenn man eine Gleichung auf eine darin enthaltene unbekannte Größe reducirt, und den dafür erhaltenen Ausdruck in die übrigen Gleichungen, statt der unbekannten Größe, setzt. Z. B.

$$\frac{x + y = 104}{x = 104 - y}; \quad \frac{x - y = 8}{104 - y - y = 8}$$

$$\frac{-2y = -104 + 8 = -96}{2y = 96}$$

$$y = \frac{96}{2} = 48.$$

Durch Substitution rückwärts findet man die andere unbekannte Größe.

F. Kann man die Gleichungen, wenn die unbekannten Größen nicht mit andern multiplicirt erscheinen, auf keine andere Art auflösen?

A. Ja! Durch die Addition und Subtraction der gegebenen Gleichungen, nachdem man sie durch die Multiplication oder Division so vorbereitet hat, daß eine unbekannte Größe, welche in beiden Gleichungen enthalten seyn muß, wegfällt. Z. B.

$$x + y = s$$

$$x - y = d \quad \text{Durch Addition.}$$

$$2x = s + d$$

$$x = \frac{s + d}{2}$$

$$x + y = s$$

$$x - y = d$$ Durch Subtraction.

$$- + \quad -$$

$$2y = s - d$$

$$y = \frac{s - d}{2}$$

Oder: $3x + 2y = 34$

$5x - y = 35$ die 2te Gleichung mit 2 multiplicirt und zu der 1sten addirt.

$$13x = 104$$

$$x = \frac{104}{13} = 8$$

$$y = 5.$$

F. 1) Man hat 2 Zahlen von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie addirt, zur Summe 44 erhält; zieht man sie aber von einander ab, so ist die Differenz 26. Welche Zahlen sind es?

A. Es sey x die größere und y die kleinere Zahl;

so ist $x + y = 44$

$$x - y = 26$$

$$2x = 70$$

$x = 35$ die größere Zahl

$$35 + y = 44$$

$y = 44 - 35 = 9$ die kleinere Zahl.

F. 2) A und B besitzen zusammen ein Vermögen von 7100 Thlr.; A giebt zu einem Handel den siebenten und B den sechsten Theil seines Vermögens und doch behalten beide gleichviel übrig. Wie reich ist jeder?

A. A hatte x Thlr. Vermögen und gab zum Handel $\frac{x}{7}$ Thlr. B hatte y Thlr. Vermögen und gab zum Handel $\frac{y}{6}$ Thlr.

daher behält A, $x - \frac{x}{7}$ übrig

und B, $y - \frac{y}{6}$,

da beide Theile gleich seyn sollen, so ist auch

$$x - \frac{x}{7} = y - \frac{y}{6} \qquad \text{und } x + y = 7100$$

$$x = \frac{35\,y}{36} \qquad x = 7100 - y$$

$$\frac{35\,y}{36} = 7100 - y$$

$$y = \frac{255600}{71} = 3600 \text{ Thlr. hatte B.}$$

$x = 7100 - 3600 = 3500$ Thlr. hatte A.

F. 3) A wettet mit B, daß er 20 Schuß unter der Bedingung thun wollte: wenn er für

jeden Treffer 8 Gr. erhielte, so würde er 12 Gr. für jeden Fehler bezahlen. Am Ende fand es sich aber, daß B dem A noch 20 Gr. Schußgeld auszahlen mußte. Wie viel mal hatte A getroffen und wie viel mal gefehlt?

A. Wenn A, x mal getroffen hat, so erhält er 8 x Gr. und fehlt er y mal, so bezahlt er 12 y Gr.

Es ist daher $x + y = 20$ Schuß und $8x - 12y = 20$ Gr.

$$8x + 8y = 160$$
$$8x - 12y = 20$$
$$20\,y = 140$$
$$y = 7 \text{ mal gefehlt}$$
$$x = 20 - 7 = 13 \text{ mal getroffen.}$$

F. 4) Drei Maurer A, B, C, sollen eine Mauer aufführen. A und B würden gemeinschaftlich diese Mauer in 12 Tagen vollenden; B und C würden in 20 Tagen damit fertig werden; A und C würden sie in 15 Tagen aufführen. Wie viel Zeit würde jeder einzelne dazu brauchen? Und in welcher Zeit würde die Mauer aufgeführt werden, wenn sie alle drei gemeinschaftlich arbeiteten?

A. x Tage würde A allein zu dieser Arbeit nöthig haben. y = = B = = = =
= = z = = C = = = =

Daher endigt A in einem Tage $\frac{1}{x}$

B = = = $\frac{1}{y}$

C = = = $\frac{1}{z}$

Mithin A und B, $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ als der ganzen Arbeit.

$$12y + 12x = xy$$

$$y = \frac{12x}{x-12}$$

A und C $\frac{15}{x} + \frac{15}{z} = 1$;

$$15z + 15x = xz$$

$$z = \frac{15x}{x-15}$$

B und C $\frac{20}{y} + \frac{20}{z} = 1$;

$$20z + 20y = yz$$

$$z = \frac{20y}{y-20}.$$

$$\frac{20y}{y-20} = \frac{15x}{x-15}$$

$$20xy - 300y = 15xy - 300x$$

$$y = \frac{60x}{60-x}$$

$$\frac{12x}{x-12} = \frac{60x}{60-x}$$

$$720x - 12x^2 = 60x^2 - 720x$$

$$6x = 120$$

$x = 20$ Tage braucht A allein

$y = \frac{60.20}{60-20} = \frac{1200}{40} = 30$ Tage B „

$z = \frac{15.20}{20-15} = \frac{300}{5} = 60$ „ C „

Arbeiten A, B, C zugleich, so fertiget A in einem Tage $\frac{1}{20}$ der ganzen Arbeit, B $\frac{1}{30}$ und C $\frac{1}{60}$. Da sie nun zu einer Zeit x Tage fertig werden, so macht A $\frac{x}{20}$, B $\frac{x}{30}$, C $\frac{x}{60}$; diese drei Theile sind aber der ganzen Arbeit gleich.

Es ist daher $\frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{60} = 1$

$$x = \frac{20.30.60}{30.60+20.60+20.30} = \frac{36000}{3600} = 10 \text{ Tage.}$$

F. 5) Ein Stück Feld von 864 Quadratruthen soll so vertheilt werden, daß sich der Antheil des ersten zum zweiten verhält wie 5 zu 11, der dritte soll aber so viel erhalten, als der erste und zweite zusammengenommen haben; wie groß jeder Theil?

A. Der erste Theil sey gleich x, der zweite y, der dritte z = 432 Quadratruthen. Es verhält sich aber

$$x : y = 5 : 11 \qquad x + y = 432$$

$$11x = 5y \quad ; \qquad y = 432 - x$$

$$y = \frac{11x}{5}$$

$$\frac{11x}{5} = 432 - x$$

x = 135 Quadratruthen erhält der erste
und y = 297 „ „ „ „ zweite.

F. 6) Einer schwangern Frau fiel nach einem Testamente eine Erbschaft von 15000 Thlrn. unter der Bedingung zu, daß, wenn sie mit einem Sohne nieder komme, sie nur 6000 Thlr., der Sohn aber 9000 Thlr. haben sollte. Bekomme sie aber bei ihrer Niederkunft eine Tochter, so solle die Mutter 8000 Thlr., die Tochter aber

7000 Thlr. haben. Hierauf kam sie aber mit einem Sohne und einer Tochter zugleich nieder. Wie soll jetzt die Erbschaft getheilt werden?

A. Hier verhält sich der Antheil der Mutter zu dem Antheile des Sohnes wie 6000: 9000 oder 2: 3. Und der Antheil der Mutter zum Antheile der Tochter wie 8000: 7000 oder 8: 7. Es sey daher das Erbtheil der Mutter $= x$, des Sohnes $= y$ und der Tochter $= z$; so verhält sich

$$x : y = 2 : 3;$$
$$3x = 2y$$
$$x = \frac{2y}{3}$$

$$x : z = 8 : 7;$$
$$7x = 8z$$
$$x = \frac{8z}{7}$$

$$x + y + z = 15000$$

$$x + \frac{12z}{7} + z = 15000$$

$$\frac{8z}{7} + \frac{12z}{7} + z = 15000$$

$$z = \frac{105000}{27} = 3888\tfrac{8}{9}$$ Thlr.

Erbtheil der Tochter.

$$\frac{2y}{3} = \frac{8z}{7}$$

$$14y = 24z$$

$$y = \frac{24z}{14} = \frac{12z}{7}$$

$$y = \frac{12}{7} \times \frac{105000}{27} = 6666\tfrac{2}{3}$$ Thlr. Erbtheil des Sohnes.

$$x = \tfrac{2}{3} \times \frac{12}{7} \times \frac{105000}{27} = 4444\tfrac{4}{9}$$ Thlr. Erbtheil der Mutter.

c) Auflösung unbestimmter Aufgaben.

F. Was versteht man unter unbestimmten Gleichungen?

A. Wenn man durch Elimination eine

Endgleichung erhält, in welcher noch zwei unbekannte Größen vorkommen.

F. Wie wird aber der Werth für die unbekannten Größen bestimmt?

A. Wenn man die Endgleichung auf eine darin enthaltene unbekannte Größe reducirt und für die andere unbekannte Größe willkührliche Werthe annimmt, um auf diese Art die Auflösung bedingungsweise auszudrücken. Z. B. Die Zahl 80 soll dergestalt in drei Theile getheilt werden, daß der erste so groß ist, als die beiden andern zusammengenommen. Ist der erste Theil x, der zweite y und der dritte z, so ist $x + y + z = 80$ und $x = y + z$, mithin $x = 40$ und $y + z = 40$

$$y = 40 - z;$$

Wenn man hier für z die willkührlichen Werthe, 2, 6, 7, 9, 13... annimmt, so ist $y = 38, 34, 33, 31, 27$ u. s. w.

F. Es sind drei Zahlen von der Beschaffenheit gegeben, daß, wenn man die erste und zweite addirt, die Summe 29 sey, und die zweite und dritte addirt, die Summe 26 giebt. Welche Zahlen ergeben sich?

A. Es sey x die erste, y die zweite und z die dritte Zahl, so ist $x + y = 29$

$$z + y = 26$$

$$- \quad - \qquad -$$

$$x - z = 3$$

$$x = 3 + z$$

Ist $z = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	
so ist $x = 4$	5	6	7	8	9	10	11	12	u. s. w.
und $y = 25$	24	23	22	21	20	19	18	17	

Aus diesen Beispielen ist zu ersehen, daß die unbekannten Größen unendlich viele Werthe annehmen und daß es folglich sehr unbestimmt sey, welche zu nehmen sind.

F. Giebt es denn keine Grenzen, zwischen welche die Werthe der unbekannten Größen fallen?

A. In manchen Fällen, wenn die Gegenstände weder negative Zahlen noch Brüche, sondern nur positive Zahlen gestatten. Z. B. Die Zahl 11 soll in zwei Theile zerfällt werden, daß die Theile positive Zahlen sind. Es sey der eine Theil x und der andere y, so ist

$$x + y = 11$$

$$x = 11 - y$$

wenn also $y =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
so ist $x =$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

In so fern hier die ersten fünf Auflösungen mit den fünf letzten einerlei sind, so finden auch nur fünf Auflösungen statt.

F. 1) Unter 2 Familien, wovon die eine aus 7 und die andere aus 11 Personen besteht, sollen 1000 Thlr. so vertheilt werden, daß jede Person in einer Familie eine gleiche Anzahl voller Thaler erhalte. Wie viel wird jede Familie erhalten?

A. Erhält eine Person in der ersten Familie x Thlr. und eine Person von der zweiten Familie y Thlr.; so bekommt die erste Familie 7 x Thlr. und die zweite Familie 11 y Thlr.

Es ist daher $7x + 11y = 1000$

$$x = \frac{1000 - 11y}{7}$$

Nimmt man für y die Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. an, bis man für x eine ganze Zahl erhält.

so ist $y =$	2	3	4	5
und $x =$	$\frac{978}{7}$	$\frac{967}{7}$	$\frac{956}{7}$	135

Mithin $7 \times 135 = 945$
$11 \times 5 = 55$
1000 Thlr.

F. 2) Es hat jemand dreierlei Wein, das Maas à 6 Gr., à 8 Gr. und à 10 Gr. Er will ein Faß, welches 10 Maas hält, füllen, daß das Maas 7 Gr. 6 Pf. werth sey; in welchem Verhältniß kann die Mischung geschehen?

A. Nimmt man x Maas à 6 Gr, y Maas à 8 Gr. und z Maas à 10 Gr., so ist

$$x + y + z = 10$$
$$x = 10 - y - z;$$

$$6x + 8y + 10z = 7\tfrac{1}{2} \times 10 = 75 \text{ Gr.}$$
$$x = \frac{75 - 8y - 10z}{6}$$

$$10 - y - z = \frac{75 - 8y - 10z}{6}$$
$$y = \frac{15 - 4z}{2}$$

Ist $z =$	1	2	3
so ist $y =$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
und $x =$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$

Drittes Kapitel.

Bildung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen.

F. Was heißt eine gegebene Größe zur n^{ten} Potenz erheben?

A. Ein Product bestimmen, welches aus n gleichen Factoren besteht. Die Anzahl der Factoren bestimmt den Grad der Potenz. Z. B. Zwei Factoren geben die 2. Potenz, oder das Quadrat; drei Factoren die 3. Potenz, oder den Kubus; vier Factoren die 4. Potenz, oder das Biquadrat u. s. w.

F. Wie nennt man die gleichen Factoren, welche zur Bildung der Potenzen erfordert werden?

A. Die Wurzeln dieser Potenzen, z. B. $8 \times 8 = 64$ hier ist 8 die Wurzel von 64; oder $2 \times 2 \times 2 = 8$, so ist 2 die Kubikwurzel aus 8. Allgemein $(a + b)$ zur 3. Potenz ist $(a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

F. Was versteht man unter dem Extrahiren oder Ausziehen der n^{ten} Potenzwurzel?

A. Eine gegebene Größe in n gleiche Factoren zerfällen und einen solchen Factor bestimmen.

F. Auf welche Art wird es angezeigt, daß aus einer Größe die n^{te} Wurzel gezogen werden soll?

A. Durch das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{\;}$ wobei die Zahl oder der Buchstabe n anzeigt, welche Wurzel zu extrahiren sey.

F. Wie nennt man die Größe, welche über den Wurzelzeichen steht?

A. Den Wurzelexponenten; bei der Quadratwurzel wird er indeß nicht besonders angegeben. Z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{a^2} = a$; es heißt hier Kubikwurzel aus 8, aus a^3; die Quadratwurzel aus 9 aus a^2.

Die Größen, welche mit dem Wurzelzeichen behaftet sind, nennt man daher überhaupt Wurzelgrößen.

F. Da man nun bei einer geraden Anzahl Factoren, sie mögen alle positiv oder negativ seyn, allemal ein positives Product erhält, wie wird

demnach bestimmt, ob die Wurzel positiv oder negativ zu nehmen sey?

A. Aus den Bedingungen der Aufgabe läßt es sich bestimmen, welche Wurzel genommen werden müsse. So lange man aber dies noch nicht untersucht hat, zeigt man es dadurch an, daß man vor die Wurzel + und — setzt. Z. B. $x = \sqrt{a^2} = \pm a$; $x = \sqrt[4]{a^4} = \pm a$ oder auch $x = \pm \sqrt{(a+b)^2} = \pm (a+b)$.

F. Bestehen aber die Factoren oder Wurzeln aus einer ungeraden Anzahl, so wird bei positiven Factoren ein positives Product, bei negativen aber ein negatives Product erscheinen; wie sind hier die Wurzeln beschaffen?

A. Aus einem positiven Product positiv und aus einem negativen negativ. Z. B. $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

F. Was versteht man unter unmöglichen oder eingebildeten Größen oder Wurzeln?

A. Wenn aus einer negativen Größe eine gerade Wurzel extrahirt werden soll. Z. B. $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-b}$; $\sqrt{-1}$. Da es hier unmöglich ist, daß eine negative Größe in eine gerade

Anzahl gleicher Factoren zerfällt werden kann; so werden diese Größen demnach in den Rechnungen bis zu Ende fortgeführt, wo sie sich öfters heben.

F. Wie wird die Wurzel aus einem Bruche gezogen?

A. Man zieht die gegebene Wurzel sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner, so wird die Wurzel wieder ein Bruch seyn. Z. B. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{9} : \sqrt{16} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$
$= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Aus diesem Satze folgt: daß umgekehrt irgend eine Potenzwurzel aus einer ganzen Zahl niemals ein Bruch seyn kann.

F. Was versteht man unter irrationalen Wurzelgrößen?

A. Wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen so beschaffen ist, daß die verlangte Wurzel daraus nicht vollkommen ausgedrückt werden kann, wenn man sich auch dem Werthe sehr nähern könnte. Z. B. solche Irrationalgrößen sind $\sqrt{27}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{(a+b)^2}$ u. s. w., wenn hier auch die ersten

Größen für die verlangten Wurzeln irrational sind, so werden sie doch für andere Wurzeln rational seyn.

F. Wie werden einfache Größen zu einer gegebenen Potenz erhoben?

A. Man multiplicirt die gegebene Größe so oft mit sich selbst, als der Potenzexponent anzeigt. Z. B. $a \times a \times a \times = a^3$; $ab \times ab \times ab = a^3 b^3$; $(a^2 c)^3 = a^{2.3} c^{1.3} = a^6 c^3$ oder $(a x^2)^3 = ax^2 \times ax^2 \times ax^2 = a^3 x^6$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

F. Wie wird aber aus einer einfachen Größe die Wurzel ausgezogen?

A. Wenn man die Exponenten der Factoren durch den Wurzelexponenten dividirt. Z. B. $\sqrt[2]{a^6 b^4} = a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{4}{2}} = a^3 b^2$; $\sqrt[n]{x^{nm}} = x^m$. Oder: $\sqrt[3]{a^2 b^4 c} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} c^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; hieraus erhellt, daß die Wurzelzeichen erspart werden können. Uebrigens gelten im Rechnen für die gebrochenen Exponenten dieselben Regeln, wie bei ganzen Zahlen.

F. Können Wurzelgrößen, welche mit ho=

hen Wurzelexponenten behaftet sind, nicht auf eine andere Art ausgedrückt werden?

A. Wenn sich der Wurzelexponent in Factoren zerfällen läßt, so kann dies auf folgende Art geschehen; z. B. $\sqrt[4]{ab} = \sqrt{\sqrt{ab}}$; $\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$; das heißt so viel, als aus ab soll die Wurzel aus dieser wieder die Quadratwurzel gezogen werden.

a) Erhebung der Wurzel zur zweiten, dritten, $n$ten Potenz und Ausziehung der Wurzeln aus denselben.

F. Wie wird eine Potenz von einer mehrtheiligen Wurzel gebildet?

A. Man multiplicirt die mehrtheilige Wurzel so oft mit sich selbst, als der Potenzexponent es angiebt. Z. B.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
zweitheilige Wurzeln.

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2.$$
dreitheilige Wurzel.

F. Wie findet man aber jede beliebige Potenz von $(a+b)$, wenn man nicht die vorhergehenden aufsuchen will?

A. Setzt man die auf einander folgenden Potenzen unter einander, so wird man wahrnehmen, daß a ohne Coefficienten mit dem Exponenten, zu welcher Potenz $(a+b)$ erhoben werden sollte und in den darauf folgenden Gliedern immer um einen Grad niedriger erscheint, so daß dieser Buchstabe im letzten Gliede nicht mehr vorkommt; b hingegen ist im ersten Gliede nicht enthalten, erscheint aber in den darauf folgenden Gliedern immer um einen Grad höher, so daß b im letzten Gliede zu derselben Potenz, als a im ersten Gliede erhoben ist. Z. B.

$$a + b$$
$$a^2 + 2\,ab + b^2$$
$$a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3$$
$$a^4 + 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 + 4\,ab^3 + b^4$$
$$a^5 + 5\,a^4 b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,ab^4 + b^5$$

Hieraus sieht man aber auch, daß die n^{te} Potenz von $(a+b)$ aus $(n+1)$ Gliedern

besteht; bei der 2. Potenz aus 3 Gliedern, bei der dritten Potenz aus 4 Gliedern u. s. w.

Man kann daher die Buchstaben mit ihren Exponenten von jeder beliebigen Potenz hinschreiben, die Coefficienten, welche bis in die Mitte wachsen und dann auch wieder so abnehmen, werden gefunden, wenn man von der gegebenen Potenz an die natürlichen Zahlen rückwärts bis 1 setzt und unter diese als Nenner dieselben Zahlen, aber in umgekehrter Ordnung, schreibt; z. B. für die 6. Potenz ist $\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$. Hieraus werden die Coefficienten folgendermaßen bestimmt, als: der erste ist 1; der zweite $\frac{6}{1} = 6$; der dritte $\frac{6.5.}{1.2.} = 15$; der vierte $\frac{6.5.4.}{1.2.3} = 20$; der fünfte $\frac{6.5.4.3.}{1.2.3.4.} = 15$; der sechste $\frac{6.5.4.3.2.}{1.2.3.4.5.} = 6$; der siebente $= 1$.

Daher ist die 6. Potenz von $(a + b) = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

F. Was versteht man unter dem Binomischen Lehrsatze oder Newton's Binomium?

A. Eine allgemeine Formel für alle mögliche Potenzen, von der zweitheiligen Wurzel $(a + b)$, welche der große Newton erfunden hat.

F. Wie wird die allgemeine Formel für $(a + b)^n$ gefunden?

A. Setzt man die Exponenten von $a = n$, $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, $n - 4 \ldots$ und unter diese die natürlichen Zahlen 1 2 3 4 5, so sind die Coefficienten

vom 1sten Gliede $= 1$

„ 2 „ „ $\frac{n}{1}$

„ 3 „ „ $\frac{n . n - 1}{1 . 2}$

„ 4 „ „ $\frac{n . (n - 1) . (n - 2)}{1 . 2 . 3 .}$

„ 5 „ „ $\frac{n . (n - 1) . (n - 2) . (n - 3)}{1 . 2 . 3 . 4}$

„ 6 „ „ $\frac{n . (n - 1) . (n - 2) . (n - 3) . (n - 4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$

u. s. w.

Verbindet man nun die allgemeinen Ausdrücke für die Coefficienten mit den allgemeinen Ausdrücken der Glieder, so erhält man die allgemeine Formel für alle mögliche Potenzen. Z. B. $(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} a^{n-3} b^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{n-4} b^4$

F. Kann diese Formel nicht noch kürzer ausgedrückt werden?

A. Ja! Man erinnere sich nur, daß eine Größe mit einem negativen Exponenten als Nenner mit positiven Exponenten gesetzt werden konnte; so ist $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$ oder $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$.

Daher ist auch: $(a + b)^n = a^n + \frac{n.\ a^n b}{1.\ a} + \frac{n.(n-1)\ a^n b^2}{1.\ 2.\ a^2} + \frac{n.(n-1)(n-2)\ a^n b^3}{1.\ 2.\ 3.\ a^3} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ a^n b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ a^4}$

F. Welches ist der vorzüglichste Nutzen dieser Formel?

A. Daß man alle mögliche Potenzen von der zweitheiligen Wurzel (a + b) nach der allgemeinen Formel finden kann, n mag dabei eine ganze Zahl, ein ächter oder unächter Bruch, eine positive oder negative Zahl seyn. Umgekehrt kann man auch aus jeder Potenz die verlangte Wurzel ziehen. Besondern Nutzen leistet diese Formel bei der Ausziehung der Wurzel aus Irrationalgrößen. Z. B.

$$(x + a)^6 = x^6 + 6\,x^5\,a + 15\,x^4\,a^2 + 20\,x^3\,a^3 + 15\,x^2\,a^4 + 6\,x\,a^5 + a^6.$$

$$(x + a - b)^3 = x^3 + 3x^2(a - b) + 3x(a^2 - 2ab + b^2) + (a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3).$$

Oder: $\sqrt{x^2 +}\,a = (x^2 + a)^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1.\ 1}{2.\ 4}\frac{a^2}{x^3} + \frac{1.\ 1.\ 3}{2.\ 4.\ 6}\frac{a^3}{x^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{a^4}{a^7}$ und

$$\sqrt[3]{(x^3 - a)}^{-2} = (x^3 - a)^{-\frac{2}{3}} = x^{-2} + \tfrac{2}{3}x^{-5}\,a + \frac{2.\ 5}{2.\ 3^2}\,x^{-8}\,a^2 + \frac{2.\ 5.\ 8}{2.\ 3.\ 3}\,3\,x^{-11}\,a^3.$$

F. Auf welche Art ist es zu bestimmen, wie vieltheilig eine Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl sey?

A. Aus der Anzahl der Ziffern, welche die gegebene Quadratzahl hat. Z. B.

$$1^2 = 1$$
$$9^2 = 81$$
$$10^2 = 100$$
$$99^2 = 2801$$
$$100^2 = 10000$$
$$999^2 = 998001$$
$$1000^2 = 1000000.$$

Hieraus folgt, daß das Quadrat einer eintheiligen Wurzel nicht über 2; das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel nicht über 4 Ziffern u. s. w. begreift. Oder noch besser, wenn man die gegebene Quadratzahl von der rechten nach der linken Hand zu in Klassen zu 2 Ziffern abtheilt, so viel Klassen man auf diese Weise erhält, so vieltheilig ist die Wurzel. Z. B. 7 | 35 | 82 | 01 | 78 | 15 | hier ist die Wurzel sechstheilig.

F. Wie findet man aber die Ziffern für die Wurzel?

A. Wenn die Wurzel eintheilig ist, so muß man die Quadrate der 9 einfachen Zahlen nach

dem Einmaleins genau angeben können; z. B. $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{81}=9$.

Ist aber die Wurzel zweitheilig, so muß man, um die Regel für die Ausziehung derselben zu finden, zuvörderst untersuchen, aus welchen Theilen der Wurzel das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel besteht; es sey: z. B. die zweitheilige Wurzel in Zahlen 85 =

$85 = 80 + 5$

$80 + 5$

6400 = Quadrat des ersten Theils der Wurzel
400 = Product aus dem ersten und zweiten Theile der Wurzel
400 = " " " " " " "
25 = Quadrat des 2. Theils der Wurzel.

7225 = Quadratzahl von 85.

Oder allgemein

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \quad\quad \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Aus diesen beiden Beispielen ergiebt sich,

daß ein jedes Quadrat einer zweitheiligen Wurzel besteht:

Aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel a^2

" " zweifachen Product des ersten und zweiten Theile der Wurzel $2\,ab$ und

" " Quadrat des zweiten Theils der Wurzel b^2.

Man findet daher die zweitheilige Wurzel, wenn man die 3 Stücke von einer Quadratzahl abzieht; so wird bei einem völligen Quadrate nichts übrig bleiben. Z. B.

$76^2 = 5.7$	76	$= 70$
$a^2 = 2 = 49$	00	6
		76
8	76	
$2\,ab = 2.\,70.\,6 = 8$	40	
	36	
$b^3 = b^2$	36	
	0	

Der Kürze wegen aber läßt man die Nullen von 4900, und 840 als auch in der Wurzel 70 weg; so ist obiges Beispiel:

57	76	= 76
$a^2 = 49$		
8	76	
$2ab = 8$	4	
	36	
$b^2 =$	36	
	0	

F. Wie findet man aber die Wurzel, wenn es noch nicht bekannt ist, aus welchen Ziffern sie besteht?

A. Nachdem man die Quadratzahl in Klassen eingetheilt hat, untersucht man, welches Quadrat der einzifferigen Zahlen der ersten Klasse gleich oder zunächst kleiner ist.

Dieses Quadrat (a^2) schreibt man unter die erste Klasse, zieht selbiges ab und die dazu gehörige Wurzel setzt man als den ersten Theil der Wurzel (a) in den Quotienten. Hierauf schreibe man die zweite Klasse neben den in der ersten Klasse übrig gebliebenen Rest; dann multiplicire man den gefundenen ersten Theil der Wurzel (a) mit 2, und schreibe das Product (2 a) unter die erste Ziffer der folgenden Klasse; eben so werden, wenn es aus mehrern Ziffern

besteht, die übrigen weiter nach der linken Hand zu gesetzt. Dann dividire man mit diesem Product in die Ziffern, welche darüber stehen, und nehme den Quotienten für den zweiten Theil der Wurzel (b) an, schreibe ihn deshalb neben dem ersten Theil derselben. Nun multiplicire man den doppelten ersten Theil (2 a) mit dem zweiten Theile (b); schreibe das Product (2 ab) darunter und ziehe es von den darüber stehenden Zahlen ab. Zu diesem Reste ziehe man die zweite Ziffer von der zweiten Klasse herunter und das Quadrat des zweiten Theils (b^2) davon abgezogen; so wird, wenn die Quadratwurzel rational ist, nichts übrig bleiben. Sollte aber das Quadrat des zweiten Theils nicht vom letzten Reste abgezogen werden können, so ist der zweite Theil zu groß angenommen worden, daher muß er um so viel vermindert werden, daß dieser Abzug statt finden kann. Z. B.

12	96	$= 3\ 6$
$a^2 = 9$		$a + b$
3	96	
$(2\,a =$	6)	
$2\,ab = 3$	6	
	36	
$b^2 =$	36	
	0	

86	49	$= 9\ 3$
$a^2 = 81$		$a + b$
5	49	
$(2\,a = 1$	8)	
$2\,ab = 5$	4	
	9	
$b^2 =$	9	
	0	

F. Kann man bei Bestimmung der zweitheiligen Wurzel nicht auch Abkürzungen anbringen?

A. Ja! Wenn man das Quadrat des ersten Theils (a^2) abgezogen und den zweiten Theil gefunden hat, kann man die beiden folgenden Producte ($2\,ab$ und b^2) zusammen abziehen. Denn $2\,ab + b^2 = b\,(2\,a + b)$,

so darf man nur den zweiten Theil b, neben den zweifachen ersten Theil (2 a) setzen und sowohl den doppelten ersten Theil (2 a), als den zweiten Theil (b) auf einmal mit dem zweiten Theile (b) multipliciren und abziehen. Z. B.

$\sqrt{34}$	81	$= 5\ 9$
$a^2 = 25$		$a + b$
9	81	
$2a + b = 1$	09	
$b =$	9	
$2ab + b^2 = 9$	81	
	0	

$\sqrt{78}$	09	$= 8\ 8$
$a^2 = 64$		$a + b$
14	09	
$2a + b = 1$	68	
$b =$	8	
$2ab + b^2 = 13$	44	
	65	

F. Wie wird aber eine mehrtheilige Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl gefunden?

A. Man bestimmt auch hier, aus den ersten beiden Klassen die beiden ersten Ziffern der

Wurzeln und betrachtet diese beiden als den ersten Theil (a); hierauf sucht man aus den noch übrig gebliebenen Zahlen (b) als den zweiten Theil zu bestimmen. Z. B.

$\sqrt{}$	12	04	09	= 3 4 7
$a^2 =$	9			a+b
	3	04		a+b
$2a + b =$		64		
$b =$		4		
$2ab + b^2 =$	2	56		
		48	09	
$2a + b =$		6	87	
$b =$			7	
$2ab + b^2 =$		48	09	
			0	

$\sqrt{}$	25	40	16	= 5 0 4
$a^2 =$	25			a+b
		40		a+b
$2a + b =$	1	00		
		40	16	
$2a + b =$		10	04	
$b =$			4	
$2ab + b^2 =$		40	16	
			0	

F. Es ereignet sich aber öfters, daß die Wurzel irrational ist und ein Rest bleibt. Zwar kann man angeben, zwischen welche ganze Zahlen die Wurzel fällt; wie wird aber die Wurzel genauer anzugeben seyn?

A. Man hängt an den letzten Rest zwei, vier, sechs Nullen, je nachdem man zehntel, hundertel, tausendel als Decimalen haben will. Man muß aber in der Wurzel die Ganzen durch ein Komma abschneiden, ehe man die darauf folgenden Ziffern in der Wurzel bestimmt. Z. B.

$\sqrt{7|65} = 27,658\ldots$

$a^2 = 4$				
3	65			
$2a + b =$	47			
$b =$	7			
$2ab + b^2 = 3$	29			
	36	00		
$2a + b = 5$		46		
$b =$		6		
$2ab + b^2 = 32$		76		
3		24	00	
$2a + b =$		55	25	
$b =$			5	
$2ab + b^2 = 2$		76	25	
		47	75	00
$2a + b =$		5	53	08
$b =$				8
		44	24	64
		3	50	36

F. Auf welche Weise wird die Wurzel aus einem Decimalbruche extrahirt?

A. Man theilt vom Komma an die Ganzen links und auch die Decimalen rechts in Klassen ein; fehlt hierbei eine Decimale, so ergänzt man sie durch eine Null. Z. B.

$$\sqrt{789,765} = \sqrt{7|89,|76|50}$$

Dann extrahire man bis zum Komma, worauf man in der Wurzel die Ganzen durch einen Punkt oder Komma abschneidet, dann fort extrahirt, bis man in der Wurzel die verlangten Decimalen erhalten hat.

F. Wie wird aber die Wurzel aus einer algebraischen Größe gefunden?

A. Nachdem man die Größe geordnet hat, sucht man die Wurzel ebenfalls nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$, indem die Glieder der gegebenen Größe als die Theile einer Quadratzahl angesehen werden. Z. B.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$$

$$a^2 = x^2$$

$$-$$

$$-6x + 9$$

$$2a = 2x$$

$$b = -3$$

$$2ab = -6x$$

$$+$$

$$+9$$

$$b^2 = 9$$

$$0$$

$$\sqrt{x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81}$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

$$a^2 = x^4$$
$$-$$

$$-12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$
$$2a = 2x^2$$
$$b = -6x^2$$

$$2ab = -12x^2$$
$$+$$

$$b^2 = \quad 36x^2$$
$$-$$

$$18x^2 - 108x + 81$$
$$2a^2 = 2x^2 - 12x$$
$$b = 9$$

$$2a^2 b = 18x^2 - 108x$$
$$- \qquad +$$

$$+81$$
$$b^2 = 81$$

$$0$$

F. Wie findet man die Wurzel aus Irrationalgrößen?

A. Eben so wie die rationalen Größen; sie bilden aber eine Reihe, welche nie abbricht. Z. B.

$$\sqrt{x^2 - b} = x - \frac{b}{2x} - \frac{b^2}{8x^3} \; . \; . \; .$$

$$a^2 = x^2$$

$$-$$

* * *

$$- b$$

$$2a = 2x$$

$$b = \frac{b}{2x}$$

* * *

$$2ab = - b$$

$$+$$

* * *

$$b^2 = - \frac{b^2}{4x^2}$$

* * *

$$- \frac{b^2}{4x^2}$$

$$2a = 2x - \frac{b}{x}$$

$$b \qquad - \frac{b^2}{8x^2}$$

* * *

$$2ab = - \frac{b^2}{4x^2} + \frac{b^3}{8x^4}$$

$$+ \qquad -$$

$$b^2 = \qquad \pm \frac{b^4}{64x^6}$$

* * *

$$- \frac{b^3}{8x^4} - \frac{b^4}{64x^6}.$$

F. Nach welcher Regel läßt sich die Kubikwurzel aus einer gegebenen Kubikzahl bestimmen?

A. Erstlich untersuche man, wie vieltheilig die Kubikwurzel aus einer mehrzifferigen Kubikzahl sich ergeben müsse. Dies kann man aus der Anzahl von Ziffern beurtheilen;

denn wenn $1^3 = 1$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

$$99^3 = 970299$$

$$100^3 = 1000000$$

u. s. w. ist, so wird man leicht einsehen, daß bei einer einzifferigen Wurzel die Kubikzahl bis zu drei Ziffern, bei einer zweizifferigen Wurzel bis sechs Ziffern seyn kann; daher theilt man von der rechten nach der linken Hand die gegebene Kubikzahl zu drei und drei Ziffern in Klassen ein; so viel Klassen man auf diese Weise erhält, so vieltheilig ist auch die Wurzel.

Es läßt sich aber auch jede Kubikwurzel als eine zweitheilige betrachten. Es sey abermals die zweitheilige Wurzel $45 = 40 + 5$, so ist die Quadratzahl davon

$= 1600 + 200 + 200 + 25$ diese mit
$40 + 5$ multiplicirt

giebt $64000 = 40 . 40 . 40 =$ Kubikzahl des ersten Theils der Wurzel

$8000 = 40 . 40 . 5 =$ Product aus dem Quadrate des ersten Theils und dem zweiten Theile.

$8000 = 40 . 40 . 5 =$ Product desgl.

$1000 = 40 . 5 . 5 =$ Product aus dem ersten Theile und dem Quadrate des zweiten Theils.

$8000 = 40 . 40 . 5 =$ Product aus dem Quadrate des ersten Theils und dem zweiten Theile.

$1000 = 40 . 5 . 5 =$ Product aus dem ersten Theile und dem Quadrate d. zweiten Theils.

$1000 = 40 . 5 . 5 =$ Desgl.

$125 = 5 . 5 . 5 =$ Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel

92125 Kubikzahl von 45.

Oder allgemein sey die zweitheilige Wurzel $= a + b$; so ist das Quadrat davon

$= a^2 + 2ab + b^2$, dieses mit
$a + b$ multiplicirt;

giebt: $a^3 + 2a^2 b + ab^2$
$a^2 b + 2ab^2 + b^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Es besteht demnach jede Kubikzahl einer zweitheiligen Wurzel aus der Kubikzahl des ersten Theils der Wurzel (a^3), dem dreifachen Product aus dem Quadrate des ersten Theils und dem zweiten Theile derselben ($3a^2b$), dem dreifachen Product aus dem ersten Theile und dem Quadrate des zweiten Theils derselben ($3ab^2$) und aus der Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel (b^3). Man findet daher nach der Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die zweitheilige Kubikwurzel, wenn man diese Theile nach und nach von der Kubikzahl abzieht; geht es hierbei am Ende auf, so ist die Wurzel rational, außerdem irrational. Z. B.

	$\sqrt[3]{658}$	503	$= 80 + 7$
$a^3 =$	512	000	$a + b$
	146	503	
$3a^2b =$	134	400	
	12	103	
$3ab^2 =$	11	760	
		343	
$b^3 =$		343	
		0	

Der Kürze wegen hätte man auch hier die Nullen weglassen können. Z. B.

$\sqrt[3]{}$	658	503 = 87
$a^3 =$	512	
	146	503
$3a^2b =$	134	4
	12	103
$3ab^2 =$	11	76
		343
$b^3 =$		343
		0

Es gelten hier eben die Regeln, daß, wenn ein Product nicht abgezogen werden kann, man die Ziffern zu groß in der Wurzel angenommen hat.

F. Kann man hier eben so, wie bei der Quadratwurzel, in Ausübung der Extraction Abkürzungen anbringen?

A. Ja; man kann die Producte erst addiren und die Summe dann auf einmal abziehen. Z. B.

$\sqrt[3]{}$	59	319	$= 39$
$a^3 =$	27		$a+b$
	32	319	
$(3a^2 =$	2	7)..	
$b =$		9..	
$3a^2b =$	24	3..	
$3ab^2 =$	7	29.	
$b^3 =$		729	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	32	319	
		0	

F. Wie wird aber eine mehrtheilige Wurzel aus einer gegebenen Kubikzahl gefunden?

A. Nach denselben Regeln der zweitheiligen Wurzeln; man bestimme erst zwei Ziffern der Wurzel und betrachte diese als den ersten Theil derselben, und rechnet dann wie vorher. Z. B.

$\sqrt[3]{}$	41	781	923	$= 3\ 4\ 7$
$a^3 =$	27			$\underbrace{a+b}_{a+b}$
	14	781		
$(3a^2 =$	2	7)..		
$b =$		4..		
$3a^2b =$	10	8..		
$3ab^2 =$	1	44.		
$b^3 =$		64		
$3a^2b+3ab^2+b^3 =$	12	304		
	2	477	923	
$(3a^2 =$		346	8)	
$b =$			7	
$3a^2b =$	2	427	6	
$3ab^2 =$		49	98	
$b^3 =$			343	
$3a^2b+3ab^2+b^3 =$	2	477	923.	

F. Wie wird aber eine irrationale Wurzel gefunden?

A. Es wird eben so verfahren, wie es bei den rationalen Wurzeln geschah, nur daß man an den letzten Rest drei Nullen anhängt und die schon entwickelten Ziffern der Wurzel durch ein Komma als Ganze abschneidet.

F. Wie findet man die Kubikwurzel aus einem Decimalbruche?

A. Man theilt die Ziffern vom Komma an sowohl rechts als links zu drei Ziffern in Klassen und zieht dann die Wurzel, wie bei ganzen Zahlen aus. Hierbei ist ebenfalls auf das Komma, gleich der Quadratwurzel, Rücksicht zu nehmen.

F. Wie wird aus einer algebraischen Größe die Wurzel extrahirt?

A. Nachdem man die Größe geordnet hat, findet man die Wurzel nach der Formel $a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3$, indem man die Glieder der gegebenen Größe als Theile einer Kubikzahl ansieht. Z. B.

$$\sqrt[3]{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = x - 3$$

$a^3 = x^3$

$-$

$-9x^2 + 27x$

$3a^2 = 3x^2$

$b = -3$

$-9x^2$

$+$

$27x - 27$

$3ab^2 = -27x$

-27

$b^3 = -27$

$+$

0

b) Rechnungsarten mit Wurzel- oder Irrational-Größen.

F. Wird der Werth einer Wurzelgröße geändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten durch eine Zahl oder Größe multiplicirt oder dividirt?

A. Nein; der Werth bleibt unverändert; denn es ist $\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$. Da nun der Werth eines Bruches nicht geändert, wenn der

Zähler und Nenner durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt wird, so muß auch

$a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$ seyn. Oder $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[2 \cdot 4]{a^{3 \cdot 4}} = \sqrt[8]{a^{12}}$.

Allgemein $\sqrt[n]{x^c} = \sqrt[nb]{x^{cb}}$ oder $\sqrt[n:b]{x^{c:b}}$.

F. Wie werden Wurzelgrößen gleichnamig gemacht, (d. h.) den Wurzelgrößen gleiche Wurzelexponenten gegeben?

A. Wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten einer Größe mit den Potenzexponenten der andern multiplicirt und auch den Wurzel- und Potenzexponenten dieser andern Größe mit den Potenzexponenten der ersten multiplicirt.

Z. B. $\sqrt[3]{a^4}$ und $\sqrt{a^3}$ so ist auch $a^{\frac{4}{3}}$ und $a^{\frac{3}{2}}$ beide Brüche auf gleiche Benennung gebracht, giebt $a^{\frac{8}{6}}$ und $a^{\frac{9}{6}}$; dieses ist auch wieder $\sqrt[6]{a^8}$ und $\sqrt[6]{a^9}$. Allgemein $\sqrt[n]{x^m}$ und $\sqrt[c]{x^a}$ dieses ist so viel als $\sqrt[cn]{x^{cm}}$ und $\sqrt[cn]{x^{a}}$.

F. Kann man die Wurzeln der rationalen Factoren einer Größe unter dem Wurzelzeichen,

als Factoren vor das Wurzelzeichen schreiben und so umgekehrt?

A. Ja; im ersten Falle zerfälle man nur die Größe unter dem Wurzelzeichen in zwei solche Factoren, daß von dem einen die verlangte Wurzel genommen werden kann, welche man dann vor das Wurzelzeichen setzt, der andere Factor aber bleibt unter dem Zeichen.

Z. B. $\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = 3\sqrt{5}$; oder $\sqrt{96}$
$= \sqrt{16.6} = 4\sqrt{6}$.

Allgemein. $\sqrt[n]{a^n b} = a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{1}{n}} = a\sqrt[n]{b}$;
$\sqrt[3]{16 a^4 b} = \sqrt[3]{8 a^3 \times 2 ab} = 2a\sqrt[3]{2 ab}$.

Im zweiten Falle erhebt man die Größe vor dem Wurzelzeichen zu der Potenz des Wurzelexponenten und multiplicirt dieses mit der Größe unter dem Wurzelzeichen.

Z. B. $3\sqrt{5} = \sqrt{9.5} = \sqrt{45}$; $4\sqrt{6}$
$= \sqrt{16.6} = \sqrt{96}$.

Allgemein: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $2a\sqrt[3]{2 ab}$
$= \sqrt[3]{8 a^3 . 2 ab} = \sqrt[3]{16 a^4 b}$.

F. Welchen Nutzen gewährt diese Art zu rechnen?

A. Theils Wurzelgrößen abzukürzen, theils ungleichartige gleichartig zu machen; nämlich, daß sie gleiche Wurzelexponenten und gleiche Größen unter dem Zeichen haben; z. B. $\sqrt{32}$ und $\sqrt{18}$ ist so viel als $4\sqrt{2}$ und $3\sqrt{2}$ sind gleichartige Größen.

F. Können Wurzelgrößen wie algebraische Größen addirt und subtrahirt werden?

A. Ja, wenn sie gleichartig sind, so addirt oder subtrahirt man sie wie algebraische Größen; z. B. $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$; oder $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

Kann man aber die Wurzelgrößen nicht gleichartig machen, so werden sie nur durch die Zeichen + oder — verbunden. Z. B. $\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{b}$; $\sqrt{ax} - \sqrt{c}$.

F. Wie werden Wurzelgrößen mit einander multiplicirt oder in einander dividirt?

A. Man gebe erst den Größen gleiche Wurzelexponenten, sodann multiplicire oder dividire man sowohl die Factoren vor dem Wurzelzeichen, als auch die Größen unter dem Zeichen. Z. B.

$$3\sqrt{2} \times 5\sqrt{6} = 15\sqrt{12};$$

$$a\sqrt[2]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ab^{\frac{1}{2}} \times cd^{\frac{1}{n}} = ab^{\frac{n}{2n}} \times cd^{\frac{2}{2n}}$$

$$= ac\sqrt[2n]{b^n d^2}.$$

Oder: $\sqrt{42} : \sqrt{6} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7};$

$$\sqrt{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{512} : \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{\frac{512}{16}} = \sqrt[6]{32};$$

$$6\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2};\quad a\sqrt[n]{b} : c\sqrt[m]{d}$$

$$= a\sqrt[nm]{b^m} : c\sqrt[nm]{d^n} = \frac{a}{c}\sqrt[nm]{\frac{b^m}{d^n}}.$$

F. Wie werden irrationale Nenner von Brüchen in rationale verwandelt?

A. Wenn der irrationale Nenner eine einfache Größe ist, multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs durch ihn. Z. B.

$$\frac{7}{5\sqrt{3}} = \frac{35\sqrt{3}}{25.\ 3} = \frac{35\sqrt{3}}{75};$$

Besteht der Nenner aber aus zwei Gliedern, so ändert man das Zeichen eines Gliedes und multiplicirt mit diesem geänderten Ausdrucke den Zähler und Nenner des Bruchs. Z. B.

$$\frac{5-\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{15-3\sqrt{2}+5\sqrt{5}-\sqrt{10}}{9-5} = \frac{15-\sqrt{2}+5\sqrt{5}-\sqrt{10}}{4}$$

F. Welche Regeln hat man bei der Multiplication und Division unmöglicher Größen zu beobachten?

A. Es finden hier dieselben Regeln hinsichtlich der Zeichen (+ und —), wie für die Multiplication und Division möglicher Größen statt. Z. B.

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab};$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{-c} = a^{\frac{1}{3}} \times -c^{\frac{1}{3}} = -a^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-ac};$$

$$-5\sqrt[n]{-a} \times \sqrt[n]{-b} = -5 . -a^{\frac{1}{n}} . -b^{\frac{1}{n}}$$

$$= -5\, a^{\frac{1}{n}}\, b^{\frac{1}{n}} = -5\sqrt[n]{ab};$$

$$\sqrt{-ab} : \sqrt{-b} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} : -b^{\frac{1}{2}} = +a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a};$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{-b}} = \sqrt{-\frac{a}{b}}.$$

F. Wie werden aber Wurzelgrößen zu Potenzen erhoben?

A. Wenn man die Factoren vor und die Größen unter dem Wurzelzeichen zu der verlangten Potenz erhebt. Z. B.

$$2\sqrt{3})^3 = 8\sqrt{27}; \ (a\sqrt[n]{b})^m = (ab^{\frac{1}{n}})^m$$
$$= a^m b^{\frac{m}{n}} = a^m \sqrt[n]{b^m}.$$

Viertes Kapitel.

Von den höhern Gleichungen.

F. Was versteht man unter höhern Gleichungen?

A. Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe in der zweiten, dritten, vierten, n^{ten} Potenz vorkommt.

F. Wie heißen die Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe in irgend einer Potenz erscheint?

A. Kommt die unbekannte Größe in der zweiten Potenz vor, so nennt man sie vom zweiten Grade, in der dritten Potenz vom dritten Grade, in der n^{ten} Potenz vom n^{ten} Grade. Z. B.

$ax^2 + bx = m + n$ } vom zweiten Grade
oder $x^2 - ax = m - bx^2$ }

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - ay^2 + by = c \\ \text{oder } y^3 - ab = by^3 - x \end{array}\right\}$$ vom dritten Grade.

$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots = d$ vom n^{ten} Grade.

F. Wenn aber die unbekannte Größe auch noch im Nenner vorkommt, wie wird dann der Grad der Gleichung bestimmt?

A. Man muß erst den Nenner wegschaffen, dann wird es sich leicht bestimmen lassen, von welchem Grad die Gleichung ist. Z. B.

$$x^2 + \frac{b}{x} = ax.$$
$$\overline{x^3 + b = ax^2.}$$

F. Was versteht man unter vollständigen und unvollständigen Gleichungen?

A. Wenn keine Potenz der unbekannten Größe von der höchsten bis zur ersten herab fehlt, so nennt man eine solche Gleichung vollständig, außerdem ist sie unvollständig. Z. B. $x^3 - 7x^2 + 8x = 20$; oder $x^3 + 8x = 15$.

F. Was bedeutet der Ausdruck: eine Gleichung auf Null bringen?

A. Nichts anderes, als daß man alle

Glieder der Gleichung in den einen Theil überträgt, so daß der andere Null wird. Z. B.

$$\frac{x^4 - 3x = 7x^3 - x^2 - 8}{x^4 - 7x^3 + x^2 - 3x + 8 = 0};$$

$$\frac{x^2 - 3x = 3a - b^2}{x^2 - 3x - 3a + b^2 = 0}.$$

Bei dieser Uebertragung wird es sich öfters treffen, daß die Glieder nicht geordnet erscheinen, deshalb muß dann die Gleichung geordnet werden, d. h. die unbekannte Größe muß in der höchsten Potenz zuerst stehen, worauf die nächst niedern Potenzen folgen. Z. B.

$$\frac{ax - bc + x^3 = d + x^2}{x^3 - x^2 + ax - bc - d = 0}.$$

F. Wenn aber in einer auf Null gebrachten Gleichung verschiedene Glieder die unbekannte Größe in einerlei Potenz enthalten; wie werden diese einfacher ausgedrückt?

A. Man schließt den Coefficienten dieser Glieder in Parenthesen, und an diese schreibt man die unbekannte Größe nur einmal. Z. B.

$$\frac{x^4 + ax^3 - bx^3 - cx^2 + dx^2 + x - e = 0}{x^4 + (a - b)x^3 + (d - c)\,x^2 + x - e = 0}.$$

F. Wie nennt man die Werthe, welche in den höhern Gleichungen für die unbekannte Größe gefunden werden?

A. Die Wurzeln der Gleichung.

F. Was versteht man unter wahren und falschen, rationalen und irrationalen, wirklichen und eingebildeten oder unmöglichen Wurzeln?

A. Sind die Wurzeln positiv, so nennt man sie wahre Wurzeln; negative aber, falsche Wurzeln; rational sind Wurzeln, deren Werth sich genau angeben läßt; findet das Gegentheil statt, so sind es irrationale Wurzeln; diese angegebenen Wurzeln nennt man auch wirkliche. Unmögliche oder eingebildete Wurzeln sind diejenigen, welche aus unmöglichen Größen gefunden werden sollen. Z. B. aus den unmöglichen Größen $\sqrt{-ab}$; $\sqrt{-5}$ sind die Wurzeln ebenfalls unmöglich.

a) Auflösung der reinen Gleichungen.

F. Was versteht man unter reinen Gleichungen?

A. Rein nennt man eine höhere Gleichung, wenn die zu bestimmende Größe nur in einer

einzigen Potenz, wenn auch in mehrern Gliedern vorkommt. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + ab = m - ax^2 \\ ay^3 - bc = \frac{d}{a} - y^3 \\ ab + x^n = ac - 3x^n \\ x^2 = \frac{a+b}{c} \\ y^n = m + a - b \end{array}\right\}$$ reine Gleichungen.

F. Welche Regeln hat man bei Reduction der reinen Gleichungen zu beobachten?

A. Man sucht auch hier die unbekannte Größe mit dem Exponenten von den übrigen bekannten zu trennen. Z. B.

$$2x - \frac{4}{x} = x$$

$$2x^2 - 4 = x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$\frac{2x^2 - 16}{x} = x$$

$$2x^2 - 16 = x^2$$

$$x^2 = 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 + 5y^2 = 70 \\ 7x^2 - 5y^2 = 155 \\ \hline 9x^2 = 225 \\ \hline x^2 = \frac{225}{9} \end{array}\right\} \text{ durch Addition.}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + y^2 = c \\ bx^2 + y^2 = d \\ - \quad - \quad - \\ \hline ax^2 - bx^2 = c - d \\ \hline (a - b)\, x^2 = c - d \\ \hline x^2 = \frac{c - d}{a - b}. \end{array}\right\} \text{ durch Subtraction}$$

$$y^2 = \frac{ad - bc}{a - b};$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{bc - ad}{b - a};$$

Es ist daher die allgemeine Form einer reinen Gleichung $x^n = a$.

F. Da aber in diesen Endgleichungen die unbekannte Größe noch in einer höhern Potenz vorkommt, wie wird hier der Werth oder die Wurzel von der unbekannten Größe gefunden?

A. Man hat nur die n^{te} Wurzel aus beiden Theilen der Gleichung auszuziehen. Z. B.

$$x^n = a$$

so ist $x = \sqrt[n]{a}$;

oder $x^2 = \frac{c - d}{a - b}$

$$x = \sqrt{\frac{c - d}{a - b}};$$

oder $x^2 = 16$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = 4.$$

oder $x^3 = 8$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

F. Da nun die Werthe oder Wurzeln bei einer geraden Potenz positiv oder negativ seyn können; wie wird es angezeigt, daß entweder diese oder jene zu nehmen sey?

A. So lange es noch nicht bekannt ist, welche von den beiden Wurzeln genommen werden soll, setzt man vor das Wurzelzeichen $\pm$ desgleichen auch vor die Wurzel. Uebrigens findet man aus der Aufgabe, welche von den bei-

den Wurzeln zu wählen ist. Z. B. so ist aus obigen Beispielen

$$x^2 = \frac{c-d}{a-b}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{c-d}{a-b}}$$

oder $x^2 = 16$

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$x^6 = 64$$

$$x = \pm\sqrt[3]{64} = \pm 2.$$

Aufgaben mit einer und mehrern unbekannten Größen für reine höhere Gleichungen.

F. 1) Welche Zahl ist es, deren Hälfte mit ihrem dritten Theile multiplicirt 864 giebt?

A. x sey die Zahl, so ist deren Hälfte $\frac{x}{2}$ und ihr dritter Theil $\frac{x}{3}$.

Es ist daher $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 864.$

$$\frac{x^2}{6} = 864.$$

$$x^2 = 5184.$$

$$x = \pm \sqrt{5184}.$$

$x = 72$ die gesuchte Zahl.

F. 2) Eine Gesellschaft von Kaufleuten legen ein Kapital zusammen, wozu ein jeder zehnmal so viel Thaler, als Personen sich in der Gesellschaft befinden, beiträgt. Der Gewinn ist von jedem Hunderte noch zweimal so groß, als Personen in der Gesellschaft sind. Der hundertste Theil dieses Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt giebt die Anzahl der Personen. Wie viel Personen, wie groß war der Gewinn und was legte jeder ein?

A. x die Anzahl der Personen, $10x$ Thaler gab jeder und $10x^2$ legten alle ein. $100 : 2x = 10x^2 : \frac{20x^3}{100} = \frac{x^3}{5}$ ganzer Gewinn.

Der hundertste Theil hiervon ist $\frac{x^3}{500}$, dieses mit

$2\frac{2}{9}$ multiplicirt $= \frac{x^3}{225}$ als die Anzahl der Personen.

Mithin ist $\frac{x^3}{225} = x$

$$x^2 = 225$$

$$x = \sqrt{225} = 15$$ Personen, jede gab $15 \times 10 = 150$ Thlr. und die ganze Einlage betrug 2250 Thlr. Mit jedem Hundert wurden 30 Thlr. und mit der ganzen Einlage 675 Thlr. gewonnen.

F. 3) Ein gewisses Kapital steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man die Anzahl der Thaler des Kapitals mit den jährlichen Zinsen, so erhält man 287296. Was für ein Kapital ist es?

A. x Thlr. war das Kapital, die Interessen erhält man aus der Proportion, $100 : 4 = x : \frac{x}{25}$ Thlr. auf ein Jahr.

Es ist daher $\frac{x^2}{25} = 287296$

$$x = \sqrt{7182400} = 2680$$ Thlr. das Kapital.

F. 4) Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man zu ihrem Quadrate 12 addirt und auch 12 davon abzieht, jene Summe mit diesem Reste multiplicirt 481 gebe.

A. Es sey die gesuchte Zahl $= x$;

so ist $(x^2 + 12)(x^2 - 12) = x^4 - 144 = 481$

$$x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5.$$

F. 5) Zu einem Handelsgeschäfte geben einige Kaufleute und zwar jeder tausendmal so viel Thaler als ihrer sind. Sie gewinnen bei diesem Geschäft 1280 Thlr. und es findet sich nach angestellter Rechnung, daß sie $\frac{1}{4}$ so viel Procente gewonnen haben, als Theilnehmer sind. Wie viel Kaufleute sind es?

A. x Kaufleute, jeder giebt $1000x$ Thlr. und alle $1000x^2$.

Es verhält sich daher $1000x^2 : 1280 = 100 : \frac{x}{4}$

$$\frac{1000x^3}{4} = 128000$$

$$x^3 = 512$$

$$x = \sqrt[3]{512} = 8 \text{ Kaufleute.}$$

F. 6) Man soll zwei Zahlen finden, welche mit einander multiplicirt das Product 72, die

eine in die andere dividirt den Quotienten 2 geben. Welche Zahlen sind es?

A. x die eine Zahl und y die andere.

So ist $xy = 72$ und $\frac{x}{y} = 2$

$$x = \frac{72}{y} \qquad x = 2y$$

$$\frac{72}{y} = 2y$$

$$y^2 = 36$$

$y = \sqrt{36} = 6$ die kleinere Zahl

$x = 2 . 6 = 12$ " größere "

b) Auflösung der verwickelten quadratischen Gleichungen und der höhern Gleichungen, welche die Form der quadratischen Gleichungen haben.

F. Was versteht man unter verwickelten quadratischen Gleichungen?

A. Gleichungen, worin die unbekannte Größe in mehrern Gliedern und zwar in ein oder mehrern zur zweiten, in andern zur ersten Potenz vorkommt, diese aber einer bekannten Größe gleich sind. Z. B.

$x : \frac{x-5}{2} = 8 : (4x - 20)$ die beiden äußern und die beiden mittlern Glieder multiplicirt;

$4x^2 - 20x = 4x - 20$

$4x^2 - 24x = -20$ durch 4 dividirt;

$x^2 - 6x = -5.$

$\frac{180}{x} = \frac{180}{x+3} + 3$ durch x multiplicirt;

$180 = \frac{180x}{x+3} + 3x$ durch x+3 multiplicirt;

$180x + 540 = 180x + 3x^2 + 9x$

$3x^2 + 9x = 540$ durch 3 dividirt;

$x^2 + 3x = 180.$

Hieraus erhellt, daß bei der Reduction dieselben Regeln anzuwenden sind, wie bei den einfachen und reinen Gleichungen. Nämlich das erste Glied enthält, bei einer geordneten verwickelten quadratischen Gleichung, das Quadrat der unbekannten Größe mit dem Coefficienten + 1 und ohne Nenner; das zweite Glied die erste Potenz der unbekannten Größe mit einem positiven oder negativen Coefficienten, der auch aus mehrern Gliedern bestehen kann; das dritte Glied endlich enthält lauter

bekannte Größen und macht den zweiten Theil der Gleichung aus.

F. Wie wird eine verwickelte quadratische Gleichung, zu einer vollständigen reinen Gleichung ergänzt?

A. Wenn man zu beiden Theilen der Gleichung eine solche Größe addirt, daß dadurch beide Theile vollkommne Quadrate werden.

F. Wie findet man die Größe, welche zu beiden Theilen der Gleichung addirt wird?

A. Wenn von der Gleichung $x^2 + ax = b$ aus dem Theile, in welchem sich die unbekannte Größe befindet, die Quadratwurzel extrahirt wird, so ergiebt sich, daß diesem Theile das Quadrat des halben Coefficienten des zweiten Gliedes fehlt, um daraus genau die Wurzel zu erhalten. Folglich können die Theile einer verwickelten quadratischen Gleichung rational gemacht werden, wenn man zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten vom zweiten Gliede addirt. Z. B.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4};$$

$$x^2 - 6x = -8$$
$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 = 1.$$

$$x^2 - 7x = -12$$
$$x^2 - 7x + \tfrac{49}{4} = -12 + \tfrac{49}{4};$$

F. Wie wird aus einer verwickelten quadratischen Gleichung der Werth für die unbekannte Größe gefunden?

A. Man ergänzt sie erst zu einer reinen Gleichung, dann zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel. Z. B.

$$x^2 + 9x = 70$$
$$x^2 + 9x + \frac{81}{4} = 70 + \frac{81}{4}$$
$$\sqrt{x^2 + 9x + \tfrac{81}{4}} = \sqrt{70 + \tfrac{81}{4}}$$
$$x + \tfrac{9}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{361}{4}} = \pm\tfrac{19}{2}$$
$$x = \pm\tfrac{19}{2} - \tfrac{9}{2} = \tfrac{10}{2} = 5.$$

Allgemein: $x^2 + ax = b$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$
$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

F. Wie müssen die höhern Gleichungen beschaffen seyn, wenn sie nach der Regel der verwickelten quadratischen Gleichung aufgelöst werden sollen?

A. Wenn die unbekannte Größe nur in zwei Gliedern vorkommt, und der Exponent im zweiten Gliede die Hälfte des Exponenten im ersten Gliede ausmacht. Z. B. Von der Form $x^n + ax^{\frac{1}{2}n} = b$; $x^4 + ax^2 = b$.

F. Wie findet man aus einer solchen höhern Gleichung die Werthe für die unbekannte Größe?

A. Man ergänzt sie eben so zu reinen Gleichungen, wie die quadratischen, löst sie dann nach den gegebenen Regeln auf. Z. B.

$$x^4 + ax^2 = b$$

$$x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}}.$$

$$x^n + ax^{\frac{1}{2}n} = b$$

$$x^n + ax^{\frac{n}{2}} + \frac{a^2}{4} = 6 + \frac{a^2}{4}$$

$$x^{\frac{n}{2}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \sqrt[\frac{1}{2}n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}}.$$

$$x^6 - ax^3 = b$$

$$x^6 - ax^3 + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

$$x^3 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}}.$$

A u f g a b e n.

F. 1) Einige Personen hatten in einem Weinhause 12 Flaschen Wein à 20 Gr. getrunken. Als sie nun den Wirth fragten, wie viel die Zeche betrage, antwortete dieser: Wenn jeder 1 Gr. weniger bezahle, als sie Personen wären, so solle Alles bezahlt seyn. Wie viel Personen hatten am Trinken Theil genommen?

A. x Personen und jeder bezahlt $x - 1$ Gr., dieses beträgt $x \times (x - 1) = x^2 - x$ Gr. bezahlen alle und verzehrt haben sie

12×20 Gr. $= 240$ Gr.

so ist $x^2 - x = 240$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{240 + \frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{961}$$

$$x = \frac{31}{2} + \frac{1}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ Personen.}$$

F. 2) Jemand kauft einige Tücher für ein gewisses Geld, verkauft sie aber bald darauf wieder für 200 Thlr. und gewinnt daran genau eben so viel Procente, als ihm diese Tücher kosteten. Wie viel bezahlt er anfänglich für diese Tücher?

A. x Thlr. der Einkaufspreis und x Procente werden gewonnen.

$$100 : x = x : \frac{x^2}{100} \text{ Thaler Gewinn}$$

$$x + \frac{x^2}{100} = 200$$

$$x^2 + 100x = 20000$$

$$x = -50 \pm \sqrt{20000 + 2500}$$

$$x = -50 \pm 150$$

$$x = 100 \text{ Thaler.}$$

3) Von einigen Arbeitern erhält jeder täglich so viel Groschen, als ihrer sind, und arbeiten so viel Tage, als sie insgesammt täglich Groschen bekommen, weniger einen Tag, und verdienen für diese Zeit insgesammt 270 Thlr. Wie viel Arbeiter waren es und wie viel Tage haben sie gearbeitet?

A. x Arbeiter, x^2 Groschen erhalten alle zusammen täglich und arbeiten $x^2 - 1$ Tag.

Mithin $(x^2-1)x = x^4 - x^2 = 6480$

$$x^2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{6480 + \tfrac{1}{4}}$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \sqrt{81} = 9 \text{ Arbeiter}$$

und $x^2 - 1 = 81 - 1 = 80$ Tage.

F. 4) Ein Stück Feld, welches $17\frac{1}{2}$ Acker à 300 Quadratruthen enthält, ist viermal länger als breit und noch 10 Ruthen darüber. Wie lang und breit ist dieses Stück Feld?

A. x Ruthen breit und $4x + 10$ Ruthen lang. So ist der Flächeninhalt $4x^2 + 10x$ Quadratruthen.

Mithin ist auch

$$4x^2 + 10x = 5250$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{2625}{2}$$

$$x + \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{2625}{2} + \frac{25}{16}} = \pm\sqrt{\frac{21025}{16}} = \frac{145}{4}$$

$x = 35$ Ruthen breit und 150 Ruthen lang.

c) Haupteigenschaften der höhern Gleichungen, der Wurzeln und willkührliche Veränderung derselben.

F. Auf welche Art kann man sich die Entstehung der höhern Gleichungen vorstellen?

A. Da die unbekannte Größe so viel Werthe oder sogenannte Wurzeln annimmt, als der höchste Exponent anzeigt, so sind die Wurzeln bei der quadratischen Gleichung $x = a$ und $x = b$; bei der kubischen $x = a$, $x = b$ und $x = c$; bei der biquadratischen $x = a$, $x = b$, $x = c$ und $x = d$. Reducirt man diese Wurzelgleichungen für jeden Fall besonders auf Null, so ist $x - a = o$, $x - b = o$; oder $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$; oder auch $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$, $x - d = o$. Endlich multiplicire man die auf Null gebrach-

ten Gleichungen für jeden Fall, so erhält man die höhern Gleichungen. Z. B.

$$(x-a)\,(x-b)=0$$

$$x^2 \left.\begin{array}{r}-a\\-b\end{array}\right\} x + ab = 0.$$

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)=0$$

$$x^3 \left.\begin{array}{r}-a\\-b\\-c\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\} x - abc = 0.$$

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)=0$$

$$x^4 \left.\begin{array}{r}-a\\-b\\-c\\-d\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{r}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{array}\right\} x + abcd = 0.$$

F. Welche Eizenschaften bemerkt man an diesen höhern Gleichungen?

A. Daß der erste Theil nach der Potenz der unbekannten Größe geordnet ist und das erste Glied mit dem Coefficienten 1.; jedes an=

dere Glied aber mit einem von den Wurzeln abhängigen Coefficienten behaftet erscheint. Nämlich das zweite Glied hat zum Coefficienten die Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen; das dritte Glied die Summe der Producte je zweier und zweier Wurzeln, das vierte Glied die Summe der Producte je dreier und dreier Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen; das letzte Glied besteht endlich in allen möglichen Gleichungen aus dem Producte aller Wurzeln. Auch ist jede Gleichung durch einen jeden ihrer Factoren $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, $(x - d)$, theilbar.

F. Welche Wurzeln können in einer Gleichung statt finden?

A. Sie können zum Theil aus positiven, negativen, ganzen, gebrochenen, rationalen, irrationalen, mithin aus möglichen und unmöglichen, öfters auch aus gleichen Wurzeln bestehen.

F. Kann die Wurzel ein Bruch seyn, wenn die Coefficienten und das Zahlen-Glied aus ganzen Zahlen bestehen?

A. Nein. Denn wären in der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ die Coefficienten

a, b, c ganze Zahlen, und es sollte der Bruch $\frac{p}{q}$ dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, eine Wurzel seyn, so müßte auch $\left(\frac{p}{q}\right)^3 - a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{bp}{q} - c = 0$ seyn; dividirt man diese Gleichung durch $\frac{p}{q}$, so ist der Quotient $\frac{p^3}{q} = ap^2 - bpq + cq^2$. Da hier der erste Theil der Gleichung ein Bruch ist, welcher keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so kann dieser einer ganzen Zahl nicht gleich seyn.

F. Wie viel unmögliche Wurzeln können in einer Gleichung vorkommen, wenn die Coefficienten mögliche Größen sind?

A. Sie können nur paarweise vorkommen und müssen eine solche Form haben, daß, wenn eine $a + \sqrt{-b}$ ist, so muß die andere $a - \sqrt{-b}$ seyn. Denn nur unter dieser Bedingung werden die unmöglichen Theile in der Addition und Multiplication sich heben lassen. Daher kann eine quadratische Gleichung zwei,

eine kubische zwei und eine biquadratische zwei oder vier unmögliche Wurzeln haben.

F. Kann eine gegebene auf o gebrachte Gleichung in eine andere Gleichung von demselben Grade verwandelt werden, ohne daß man die Wurzeln der gegebenen Gleichung kennt?

A. Ja. Die Wurzeln werden aber in der neuen Gleichung um einen gewissen Theil kleiner oder größer. Es sey z. B. die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 31x + 70 = 0$ gegeben, welche in eine andere verwandelt werden soll, deren Wurzel um 4 größer sind, als in der ersten Gleichung. Setzt man daher die eine Wurzel $x = y - 4$;

$$x^2 = y^2 - 8y + 16,\quad x^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64.$$

$$\text{Aus der gegebenen Gleichung noch}\left\{\begin{array}{lr} -4x^2 = & -4y^2 + 32y - 64 \\ -31x = & -31y + 124 \\ 70 = & +70 \end{array}\right.$$

$$0 = y^3 - 16y^2 + 49y + 66 = 0.$$

In dieser neuen Gleichung ist jede Wurzel $y = x + 4$. Die Wurzel in der gegebenen Gleichung aber waren $+2$, -5, $+7$, so müssen also in der neuen Gleichung jede um

4 größer, das ist + 6, − 1, + 11 seyn. Oder es sey die allgemeine Gleichung $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ gegeben. Setzt man die eine Wurzel $x = y - q$ so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3qy^2 + 3q^2y - q^3 \\ -ax^2 &= \quad - ay^2 + 2aqy - aq^2 \\ +bx &= \quad by - bq \\ c &= \quad c \end{aligned}$$

$$0 = y^3 \begin{Bmatrix} -3q \\ -a \end{Bmatrix} y^2 \begin{Bmatrix} +3q^2 \\ +2aq \\ +b \end{Bmatrix} y \begin{Bmatrix} -q^3 \\ -aq^2 \\ -bq \\ +c \end{Bmatrix} = 0.$$

Eine Gleichung, worin alle Wurzeln um q größer, als in der ersten sind.

F. Kann man nicht auf diese Art eine jede Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher die Wurzeln um ein gewisses kleiner werden?

A. Ja. Es sey z. B. die Gleichung $y^3 - 16y^2 + 49y + 66 = 0$ gegeben und alsdann sey

$$y - 4 = x$$

und $y = x + 4$

und $y^2 = x^2 + 8x + 16$

und $y^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

$$\begin{aligned}
-16y^2 &= -16x^2 - 128x - 256 \\
+49x &= +49x + 196 \\
+66 &= +66 \\
\hline
& x^3 - 4x^2 - 31x + 70 = 0.
\end{aligned}$$

In dieser neuen Gleichung ist jede Wurzel x und 4 kleiner als y in der gegebenen war.

Oder allgemein:

$x^2 - ax + b = 0$; setzt man $x = y + q$

so ist $x^2 = y^2 + 2qy + q^2$

$$\begin{aligned}
-ax &= -ay - aq \\
+b &= +b \\
\hline
\end{aligned}$$

$$y^2 + \left.\begin{matrix} 2q \\ -a \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} q^2 \\ -aq \\ +b \end{matrix}\right\} = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher jede Wurzel um q kleiner ist, als in der gegebenen.

F. Wenn in einer Gleichung die Wurzeln theils positiv, theils negativ sind, kann man

eine Gleichung nicht so darstellen, daß alle Wurzeln positiv oder negativ werden?

A. Ja; man darf nur für die unbekannte Größe x, wenn die Wurzeln positiv werden sollen, eine Größe $y - q$ substituiren, worin $-q$ kleiner, als die kleinste negative Wurzel seyn muß. Sollen aber alle Wurzeln negativ werden, so substituirt man für die unbekannte Größe x eine Größe $y + q$, worin q größer, als die größte positive Wurzel ist. Z. B. in der Gleichung $x^4 - x^3 - 43x^2 - 23x + 210 = 0$ deren Wurzeln $+ 2 - 5 + 7 - 3$ sind; substituirt man $y - 6$ anstatt x, so ist $y^4 - 25y^3 + 191 y^2 - 479y + 312 = 0$, deren Wurzeln $+ 8, + 1, + 13, + 3$ sind; oder $y + 8$ anstatt x, so ist die neue Gleichung

$$y^4 + 31y^3 + 317y^2 + 1145y + 858 = 0,$$

deren Wurzeln $- 6 - 13 - 1 - 11$ sind.

F. Kann man auch jede höhere Gleichung in eine andere von demselben Grade verwandeln, deren Wurzeln durch Multiplication oder Division verändert einen gewissen Theil größer oder kleiner sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung?

A. Ja! wenn man unter die Glieder der gegebenen Gleichung, ohne ein einziges (ja selbst wenn ein Glied fehlen sollte) zu übergehen, die Potenzen der Zahl schreibt, mit welcher die Wurzeln zu multipliciren oder zu dividiren sind und durch die Potenzen die darüberstehenden Glieder im erstern Falle multiplicirt und im zweiten dividirt. Z. B. Die Wurzeln der Gleichung $y^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0$ sollen mit 2 multiplicirt werden, so ist

$$\begin{array}{llll} y^3 - & 12\,y^2 + & 48\,y - & 64 = 0 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \text{ Durch Multiplication.} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline y^3 - & 24y^2 + & 192\,y - & 512 = 0. \end{array}$$

Oder durch 2 dividirt giebt:

$$\begin{array}{llll} y^3 - & 12\,y^2 + & 48\,y - & 64 = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline y^3 - & 6y^2 + & 12\,y - & 8 = 0 \end{array}$$

oder $x^4 + * - 20x^2 + * + 64 = 0$ deren Wurzeln
dividirt $-4, -2, 2, 4$ sind;
durch $1, 2, 4, 8, 16$
giebt $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$,
deren Wurzeln $-2, -1, 1, 2$, sind, und

durch Multiplication hätte man erhalten $x^4 - 80x^2 + 1024 = 0$, deren Wurzeln $-8, -4, 4, 8$ sind.

F. Wie kann man die gebrochenen Coefficienten einer Gleichung eliminiren?

A. Man suche eine Zahl q ausfindig zu machen, so daß der Nenner des zweiten Gliedes in q, der des dritten in q^2, der des vierten in q^3 u. s. w. durchgängig ganzemale enthalten ist. Der Generalnenner läßt sich hierzu allemal gebrauchen, doch ist es besser, wenn eine kleinere Zahl angewendet werden kann. Z. B.

$$x^3 - 2x^2 - \tfrac{7}{4}x + \tfrac{15}{2} = 0$$

Durch die Potenzen von 2 multiplicirt: $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$

giebt $$x^3 - 4x^2 - 7x + 60 = 0$$

deren Wurzeln $3, -4, 5$ und in der gegebenen $1\tfrac{1}{2}, -2, 2\tfrac{1}{2}$ sind. Auf dieselbe Art lassen sich durch die Multiplication und Division die irrationalen Coefficienten einer Gleichung eliminiren.

F. Wenn in einer Gleichung ein Glied der unbekannten Größe fehlt, wie wird dieses in die Gleichung gebracht, um letztere vollständig zu machen?

A. Man substituire anstatt der unbekannten Größe x willkührlich eine Größe $y \pm p$, so wird man eine Gleichung erhalten, die alle Glieder der unbekannten Größe begreift. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 20x^2 + 64$, deren Wurzeln $-4, -2, 2, 4$, sind, substituire man $y - 1$ anstatt x, so ist

$$\begin{aligned} x^4 &= y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\ -20x^2 &= \qquad\qquad -20y^2 + 40y - 20 \\ +64 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 64 \\ \hline & y^4 - 4y^3 - 14y^2 + 36y + 45 = 0, \end{aligned}$$

deren Wurzeln $-3, -1, 3, 5$ um 1 größer, als die Wurzeln der ersten Gleichung sind.

F. Wie wird das zweite Glied aus einer Gleichung entfernt?

A. Wenn es das Zeichen + hat, so vermehrt man die Wurzeln; wenn es hingegen mit — bezeichnet ist, vermindert man die Wurzeln um den Quotienten, welcher dadurch erhalten wird, daß man den Coefficienten des zweiten Gliedes durch den Exponenten des ersten Gliedes dividirt. Um aber hierbei die Brüche zu vermeiden, wenn nämlich der Coefficient des zweiten Gliedes sich durch den Exponenten des

ersten Gliedes nicht gerade aufdividiren läßt, muß man die Wurzeln der Gleichung erst durch diesen Exponenten multipliciren. Z. B. Aus der Gleichung $x^3 - 6x^2 - 25x + 150 = 0$ ist das zweite Glied wegzuschaffen; so ist $y + \frac{6}{3} = y + 2$ anstatt x.

$$
\begin{array}{rrrrr}
x^3 = & y^3 & + 6y^2 & + 12y & + 8 \\
- 6x^2 = & & - 6y^2 & - 24y & - 24 \\
- 25x & & & - 25y & - 50 \\
150 & & & & + 150 \\
\hline
& y^3 & & - 37y & + 84 = 0.
\end{array}
$$

Oder $x^2 + 5x - 24 = 0$, durch die Potenzen des

$\;\;1 \;\;\; 2 \;\;\; 4$ Exponenten multiplicirt.

$x^2 + 10x - 96 = 0$, deren Wurzeln zweimal größer als in der gegebenen sind.

Vermehrt man nun die Wurzeln dieser Gleichung um $\frac{10}{2} = 5$;

so ist $x + 5 = y$

$$x = y - 5$$

$$
\begin{array}{rrrr}
\text{und } x^2 = & y^2 & - 10y & + 25 \\
+ 10x = & & + 10y & - 50 \\
- 96 = & & & - 96 \\
\hline
& y^2 & - 121 & = 0 \\
\hline
& y & = 11 &
\end{array}
$$

und es ist auch $y = x + 5$

$$x = + 11 - 5 = 6.$$

Da aber hier die Wurzeln zweimal größer sind, als in der gegebenen Gleichung $x^2 + 5x - 24 = 0$, so ist $x = \frac{6}{2} = 3$ und $- 8$.

F. Welche Form muß eine gegebene Gleichung erhalten, um daraus die rationalen Wurzeln zu bestimmen?

A. Die Gleichung muß vollständig und geordnet seyn, kein Glied darf einen gebrochenen oder irrationalen Coefficienten enthalten und das erste Glied kann nur den Coefficienten 1 haben.

F. Was versteht man unter den Folgen und Abwechselungen der Zeichen?

A. Folgen der Zeichen nennt man in einer geordneten Gleichung, wenn die auf einander folgenden Glieder gleiche Zeichen und Abwechselungen, so wie die auf einander folgenden Glieder verschiedene Zeichen haben; so hat die Gleichung $x^4 - ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$ drei Abwechselungen und eine Folge.

F. Welchen Nutzen gewährt die Untersuchung der Folgen und Abwechselungen der Zeichen?

A. Daß, wenn eine Gleichung lauter

mögliche Wurzeln hat, sie so viel negative Wurzeln als Folgen der Zeichen und so viel positive Wurzeln als Abwechselungen der Zeichen enthält. Der Grund des sogenannten Harriotschen oder Cartesianischen Lehrsatzes ergiebt sich aus Folgendem:

1) Von einer Gleichung, deren Wurzeln alle positiv sind, haben die ungeraden Glieder das Zeichen $+$ und alle geraden Glieder $-$; denn $(x - a)\ (x - b)\ (x - c) = o$

$$\text{giebt } x^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x - abc = o.$$

2) Eine Gleichung, deren Wurzeln alle negativ sind, hat nur positive Glieder; denn $(x + a)$ $(x + b)\ (x + c) \ldots = o$;

$$x^3 \left.\begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x + abc = o.$$

3) Bei einer geraden Anzahl positiver Wurzeln ist das Zahlenglied stets positiv, bei einer ungeraden Anzahl aber stets negativ.

4) Es können z. B. in einer quadratischen Gleichung nur die möglichen Wurzeln a, b oder a, — b oder — a, — b seyn, so ist für den ersten Fall die Gleichung $x^2 - (a - b) x - ab = o$ giebt zwei Abwechselungen; im zweiten Falle der Gleichung $x^2 - (a + b) x + ab = o$ giebt eine Abwechselung und eine Folge und im dritten Falle die Gleichung $x^2 + (a + b) x + ab = o$ giebt zwei Folgen.

5) Hat eine kubische Gleichung bei lauter möglichen Wurzeln für eine positive Wurzel stets nur eine Abwechselung, für zwei positive zwei Abwechselungen, für drei positive drei Abwechselungen.

6) Jede Gleichung, insofern sie nur mögliche Wurzeln enthält, hat stets n Abwechselungen, wenn in ihr n positive vorhanden sind und eben so hat sie auch q negative Wurzeln, wenn sie q Folgen der Zeichen enthält.

d.

Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

F. Wie werden die Wurzeln in einer

kubischen und biquadratischen Gleichung gefunden?

A. Wenn die gegebenen Gleichungen zufällig ein reiner Kubus oder ein reines Biquadrat ist, so hat man nur nöthig, im erstern Falle die Kubikwurzel und im zweiten die Biquadratwurzel zu extrahiren. Z. B.

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$$

$$\sqrt[3]{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Sollte aber das Zahlenglied so beschaffen seyn, daß noch etwas hinzu zu zählen oder abzuziehen wäre, um die Gleichung zu einem reinen Kubus oder Biquadrat zu ergänzen, so muß man die Größe zu beiden Theilen der Gleichung addiren oder abziehen. Z. B.

$x^3 - 15x^2 + 75x - 468 = 0$ zu beiden Theilen 343 addirt giebt:

$$x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 343$$

$$x - 5 = \sqrt[3]{343} = 7$$

$$x = 12.$$

Solche Gleichungen sind bequem aufzulösen, kommen aber selten vor.

F. Kann man bei Erfindung der Wurzeln aus einer vollständigen höhern Gleichung auf eine ähnliche Art, wie bei den verwickelten quadratischen Gleichungen verfahren?

A. Nein. Man hat sich zwar überaus viel Mühe gegeben, ein ähnliches Verfahren zu ergründen; aber man ist nicht sonderlich glücklich gewesen: wenn man auch für einige besondere Fälle Formeln fand, so sind sie doch nicht allgemein anwendbar.

F. Da aber jede Gleichung so viel Wurzeln hat, als der Exponent der höchsten Potenz anzeigt, wie wird man in einer vorkommenden Gleichung diese Wurzeln finden?

A. Man erinnere sich nur, daß der Coefficient des zweiten Gliedes aus der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen, der des dritten Gliedes aus der Summe aller Producte je zweier und zweier, der des vierten Gliedes aus der Summe der Producte je dreier und dreier Wurzeln, endlich das letzte Glied aus dem Producte aller Wurzeln besteht; oder daß eine jede höhere Gleichung so angesehen werden kann, als sey sie aus der Multiplication so

vieler Gleichungen vom ersten Grade entstanden, als der höchste Exponent Einheiten enthält. Wenn man demnach das letzte Glied in alle seine positiven und negativen Factoren zerfällt und so viel einfache auf o gebrachte Gleichungen bildet, mit denen man die gegebene Gleichung nach einander dividirt; geht hierbei die Division auf, so ist der Factor, mit welchem die einfache Gleichung gebildet wurde, eine Wurzel. Da bei kubischen Gleichungen der Quotient als eine verwickelte quadratische Gleichung erscheint, so sind die übrigen beiden Wurzeln nach jenen Regeln zu finden. Wäre aber die gegebene eine biquadratische Gleichung gewesen, so würde der Quotient eine kubische Gleichung geben, welche man wieder nach der obigen Regel auflöst. Z. B. In der Gleichung $x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x - abc = o$ besteht das letzte Glied aus dem Product aller Wurzeln, so ist auch $(x - a)\,(x - b)\,(x - c) = o$.

Mithin

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc = 0$$

dividirt durch

$$x - c = x^2 - (a+b)x + ab - c.$$

$$x^3 - cx^2$$

$$- \quad +$$

$$- (a+b)x^2 + (ab+bc+ac)x$$

$$- (a+b)x^2 + \quad (bc+ac)x$$

$$+ \quad -$$

$$abx - abc$$

$$abc - abc$$

$$- \quad +$$

$$0.$$

Oder $x^3 - 9x + 26x - 24 = 0$ die Factoren vom letzten Gliede sind

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 12 \pm 24.$$

Versucht man mit den Gleichungen $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, u. s. w. die gegebene zu dividiren, so wird man finden, daß sie sich mit $x - 2$, $x - 3$, und $x - 4$ gerade aufdividiren läßt; es sind auch wirklich 2, 3, 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung.

F. Wenn sich aber die gegebene Gleichung

durch die aus den Factoren des letzten Gliedes gebildeten einfachen Gleichungen nicht gerade aufdividiren läßt, worauf kann man da schließen?

A. Daß die gegebene Gleichung keine rationale, sondern lauter irrationale und eingebildete Wurzeln habe; die letzten können aber nur in einer geraden Anzahl vorkommen, wenn in der Gleichung selbst keine eingebildeten Größen sich befinden.

F. Die Erfindung der rationalen Wurzeln ist aber bei einem großen Zahlenglied sehr beschwerlich, kann man hierbei keine Abkürzungen anbringen?

A. Da man aus den Folgen und Abwechselungen der Zeichen auf die wahren und falschen Wurzeln schließen kann, so wird bei Erfindung der Wurzeln jede unnöthige Division mit den Factoren wegfallen. Z. B. wenn eine Gleichung nur eine negative Wurzel begriffe und man diese gefunden hätte, so braucht man die übrigen negativen Factoren nicht zu versuchen, und eben so ist es auch mit den positiven Factoren. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 36x + 45 = 0$ sind die Factoren des letzten Gliedes — 1, — 3, —

5, — 9 und + 1, + 3, + 5, + 9 und; hätte man die beiden negativen Wurzeln — 3, — 1 gefunden, so wendet man keine negativen weiter an, weil die Gleichung nur 2 Folgen, mithin auch nur zwei negative Wurzeln hat. Doch gilt das nur, was von den Zeichen der Gleichungen gesagt ist, für die Gleichungen, welche lauter wirkliche und keine eingebildete Wurzeln haben.

F. Welche Gleichungen können aus lauter unmöglichen Wurzeln zusammen gesetzt seyn, ohne daß die Coefficienten unmögliche Größen sind?

A. Alle Gleichungen von geraden Potenzen, weil die eingebildeten Größen durch die Multiplication das Product einer wirklichen Größe geben. Z. B.

In der quadratischen Gleichung $x^2 + 8x + 13 = 0$ sind die Wurzeln $4 + \sqrt{-3}$ und $4 - \sqrt{-3}$ beide unmöglich.

Oder: $x^4\ 10x^3 + 31x^2 + 42x + 26 = 0$ deren Wurzeln $1 + \sqrt{-1}$, $4 + \sqrt{-3}$,

$1 - \sqrt{-1}$, $4 - \sqrt{-3}$ auch unmöglich sind.

F. Da die Wurzeln einer Gleichung rational oder irrational und überhaupt möglich oder unmöglich seyn können, wodurch wird man sich das Auffinden der Wurzeln noch erleichtern?

A. Dadurch, daß man die Grenzen zu bestimmen sucht, zwischen welche Zahlen die Wurzeln der Gleichung fallen; indem man die Wurzeln um einen gewissen Theil vergrößert oder verkleinert, d. i. wenn man anstatt der unbekannten Größe x eine andere Größe $y \pm q$ in die gegebene Gleichung substituirt. Wenn daher in einer Gleichung entweder lauter oder zum wenigstens eine wahre Wurzel sich befindet, so verkleinere man die Wurzeln, bis die Gleichung nichts als falsche Wurzeln enthält; dann wird keine Wurzel der Gleichung größer als die Zahl seyn, um welche die Wurzeln verringert wurden. Sind aber mehrere, auch nur eine Wurzel der Gleichung falsch, so vergrößere man eben so die Wurzeln, bis die Gleichung lauter wahre Wurzeln hat; dann wird auch keine Wurzel

kleiner, als die negative Zahl seyn, mit welcher die Wurzeln vergrößert wurden. Z. B. In der Gleichung $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$ ist eine falsche Wurzel.

Wenn man aber hier die Wurzeln um 2 vergrößert, so erhält man die Gleichung $y^3 - 14y^2 + 49y - 36 = 0$. Hier ist die falsche Wurzel gewiß nicht kleiner als -2.

Verkleinert man aber die Wurzeln um 8, so ist die neue Gleichung $y^3 + 16y^2 + 69y + 54 = 0$, in welcher die Wurzeln um 8 verkleinert sind; daher wird die wahre Wurzel nicht größer als 8 seyn. Die Grenzen der Wurzeln in der gegebenen Gleichung sind also -2 und $+8$; dies hat auch seine Richtigkeit, indem sie wirklich -1, 2, 7 sind.

F. Wenn aber alle Glieder der gegebenen Gleichung positiv sind, mithin lauter negative oder vielleicht auch unmögliche Wurzeln enthalten, wie werden dann die Grenzen der Wurzeln bestimmt?

A. Die eine Grenze ist in diesem Falle 0 und die andere wird gefunden, wenn man die Wurzeln um einen gewissen Theil vergrößert,

so daß die Gleichung lauter wahre Wurzeln enthält.

Da man nun die positiven und negativen Grenzen der Wurzeln anzugeben im Stande ist, so darf man die Factoren des Zahlengliedes, welche über diese Grenzen hinausfallen, nicht in die gegebene Gleichung substituiren, da diese keine Wurzeln sind. Hat man daher bei der kubischen Gleichung eine und bei der biquadratischen zwei Wurzeln ausfindig gemacht, so wird man aus dem Vorhergesagten die übrigen Wurzeln leicht finden.

F. Wie findet man aber die irrationalen Wurzeln einer Gleichung?

A. Man substituire für die unbekannte Größe in der Gleichung, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.... und auch — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6.... Erhält man hierbei für zwei auf einander folgende Zahlen ein paar Substitutionsresultate, welche die Zeichen wechseln, so kann man darauf rechnen, daß zwischen diesen Zahlen wenigstens eine mögliche Wurzel liege; oder wenn die Substitutionsresultate entweder positiv oder negativ abnehmen, sich folglich der Null nähern

und dann ohne die Zeichen zu wechseln, wieder positiv oder negativ zunehmen, so liegen zwischen je zwei Zahlen, deren Substitutionsresultate sich der Null am meisten nähern, eine gerade Anzahl möglicher Wurzeln. Z. B. $x^3 - 12\,x^2 + 57x - 94 = 0$ zerfälle man in die Factoren $(x - 12)\,(x + 57)\,x - 94 = 0$ und substituire für x die Zahlen:

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
$-102, -40, -36, -50, -49, -48, -20 -4, +6.$

Da hier die Zeichen bei den Resultaten wechseln, so liegt die irrationale Wurzel zwischen den beiden Zahlen 3 und 4. Will man aber die Wurzel noch genauer haben, so substituire man 3 mit einem Bruche in die gegebene Gleichung, so wird man sich durch wiederholte Substitution immer mehr der wahren Wurzel nähern.

Um den Werth einer irrationalen Wurzel durch Substitutionsversuche zu entwickeln, ist es beim gewöhnlichen Gebrauch zu mühsam, wenn man den Decimalbruch mit einigen Stellen richtig haben will; deshalb hat man eine bequemere Methode aufgesucht, die irrationalen Wurzeln zu ent-

wickeln. Z. B. Wenn eine Wurzel der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + d = 0$ durch Versuche beinahe q gefunden wurde, also dergestalt, daß noch ein ächter Bruch zu q gerechnet werden müßte, um die wahre Wurzel zu erhalten, mithin $x = q + p$ wäre. Substituirt man daher $q + p$ in die gegebene Gleichung und läßt p in den höhern Potenzen aus der neuen Gleichung weg, so erhält man durch folgenden Ausdruck einen nähern Werth für die irrationale Wurzel:

$$= \frac{(m-1)q^m + (m-2)aq^{m-1} + (m-3)bq^{m-2} + \ldots - d.}{mq^{m-1} + (m-1)aq^{m-2} + (m-2)bq^{m-3} + \ldots + d.}$$

Für die cubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0;\ x = \frac{2q^3 + aq^2 - c}{3q^2 + 2aq + b};$$

Für die biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d;\ x = \frac{3q^4 + 2aq^3 + bq^2 - d}{4q^3 + 3aq^2 + 2bq + c.}$$

Z. B. in der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ fällt die irrationale Wurzel zwischen $+3$ und $+4$, mithin ist nach der ersten Formel $a = -12$, $b = 57$, $c = -94$, $q = 3$, und

$$x = \frac{2.3^3 - 12.3^2 + 94}{3.3^2 - 2.12.3 + 57.} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3,33\ldots$$

Substituirt man diesen gefundenen Werth wie-

der statt q in die Formel, so wird die Wurzel noch genauer gefunden.

Oder wenn in einer Gleichung $x^3 - 6x^2 + 3x + 18 = 0$ die irrationale Wurzel zwischen 4 und 5 fällt, so kann man diese auch finden, wenn man zur 4 noch einen ächten Bruch y setzt und diese Größe anstatt x in die gegebene Gleichung substituirt, so ist

$$x = 4 + y$$
$$x^2 = 16 + 8y + y^2$$
$$x^3 = 64 + 48y + 12y^2 + y^3$$
$$-6x^2 = 96 - 48y - 6y^2$$
$$+3x = 12 + 3y$$
$$+18 = 18$$
$$-2 + 3y + 6y^2 + y^3 = 0.$$

Da nun hier die höhern Potenzen eines Bruchs y immer kleinere Brüche werden, so läßt man die höchste Potenz weg, da man die Wurzel nur beinahe wissen will, und setzt demnach nur

$$6y^2 + 3y - 2 = 0$$
$$y^2 + \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{3}$$
$$y + \tfrac{1}{4} = \sqrt{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{16}}$$
$$y = -\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{19}{48}} = 0,629$$
$$y = 0,379\ldots\ldots$$

Es war aber $x = 4 + y$

oder $x = 4 + 0,379 = 4,379 \ldots\ldots$

Wollte man den Werth für $x = 4,379$ noch genauer haben, so substituire man anstatt x nochmals $4,379 + y$ in die gegebene Gleichung.

F. Hat man nicht auch besondere Regeln, die Wurzeln einer cubischen Gleichung zu entwickeln?

A. Ja, nach der Formel des Cardanus.

F. Wie wird diese Formel gefunden?

A. Man bringt erstlich die Gleichung auf die allgemeine Form $x^3 + ax - b = 0$, indem man das zweite Glied durch Substitution aus der Gleichung eliminirt. Es können hierbei 3 Fälle statt finden, als:

$$x^3 = ax + b$$

oder $x^3 = -ax + b$

oder $x^3 = ax - b$.

Stellt man sich die eine Wurzel in zwei Theile zerfällt vor, so

ist $x = p + q$

und $x^3 = p^3 + 3qp^2 + 3q^2p + q^3$

$ax + b = ap + aq + b$

$$p^3 + 3qp^2 + 3q^2p + q^3 = ap + aq + b$$

$$3qp(p+q) + p^3 + q^3 = a(p+q) + b.$$

Es ist aber auch $x^3 - 3qp(p+q) - (p^3+q^3) = x^3 - 3qpx - (p^3+q^3) = 0$;

Vergleicht man die Glieder der letzten Gleichung mit denen der ersten gegeben, so findet man $a = 3qp$ und $b = p^3 + q^3$; es war auch

$$ax = ap + aq$$

$$3qp(p+q) = a(p+q)$$ durch $p+q$ div. giebt

$$3qp = a$$

$$q = \frac{a}{3p}$$

$$q^3 = \frac{a^3}{27p^3}$$

Da nun $p^3 + q^3 = b$ ist

so ist auch $p^3 + \frac{a^3}{27p^3} = b$

$$p^6 + \frac{a^3}{27} = by^3$$

$$p^6 - by^3 = -\frac{a^3}{27}$$

$$p^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

$$p^3 + q^3 = b$$

$$q^3 = b - p^3$$

$$q^3 = b - \left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}\right)$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

$$p + q = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Wenn die zweite Gleichung $x^3 = - ax + b$ gegeben ist, so findet man auf eben die Art.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Wenn endlich die letzte Gleichung $x^3 = ax - b$ gegeben ist, so ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Wenn die Größen a und b so beschaffen sind, daß $\frac{a^3}{27}$ kleiner als $\frac{b^2}{4}$ ist, so hat es keine Schwierigkeit nach diesen Formeln die Wurzeln zu finden.

Ist aber $\frac{a^3}{27}$ größer als $\frac{b^2}{4}$ so ist $\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}$ eine negative und folglich $\sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}$ eine eingebildete Größe; mithin fällt unter diesen Umständen die Auflösung, im ersten und letzten Falle weg, und man hat die Wurzeln nach den vorher gegebenen Regeln zu bestimmen.

F. Kann man die Wurzeln einer jeden höhern Gleichung, wenn auch nicht ganz genau, doch durch Annäherung finden?

A. Ja. Der Herr Professor Prändel hat ein Verfahren zur Auflösung der höhern Gleichungen vorgeschlagen und dieses bestehet darin: daß, wenn ein Glied fehlen sollte, dieses in die Gleichung nach den früher gegebenen Regeln gebracht wird; das Zahlenglied bringt man in den andern Theil der Gleichung. Hierauf sucht man aus beiden die Wurzel auszuziehen und bemerkt den fehlenden Theil des ersten Theils. Diese beiden Wurzeln setzt man einander gleich und substituirt die erhaltene Wurzel in den fehlenden Theil, ergänzt durch diese beide Theile der Gleichung, so wird der erste rational werden. Zieht man nun die Wurzel aus beiden

Theilen der neuen Gleichung und setzt die beiden Wurzeln wieder einander gleich, so wird man eine zweite Annäherung erhalten. Hierbei hat man Achtung zu geben, wenn das Zahlenglied Factoren hat, welchen Factor sich diese Annäherungen nähern und dieser ist gewöhnlich eine Wurzel.

Sollten sich aber die Annäherungen um keine ganze Einheit verändern, so findet man den noch fehlenden Theil durch die Näherungsformeln

$$x = \frac{2q^3 + aq^2 - c}{3q^2 + 2aq + b}; \quad x = \frac{3q^4 + 2aq^3 + bq^2 - d}{4q^3 + 3aq^2 + 2bq + c}.$$

Aus den beiden Näherungsformeln für die cubische und biquadratische Gleichung wird man das Gesetz leicht wahrnehmen, wie diese Formeln für die Gleichungen vom fünften und sechsten u. s. w. Grade abzuleiten sind.

Es sey z. B die Gleichung $x^3 - 9x^2 + 26x = 24$ gegeben, so ist nach der obigen Regel

$$\frac{x - 3 = 2}{x = 5}$$ und der fehlende Theil $x - 27$.

so ist $x^3 - 9x^2 + 26x = 24$

$$x = 5$$

$$-27 = -27$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 2$$

$$(x-3)^3 = 2 = (1,26)^3$$

$$x - 3 = 1,26$$

$$x = 4,26.$$

Da sich der Werth von x der 4 nähert, und diese auch ein Factor vom Zahlengliede ist, so ist zu vermuthen, daß 4 eine Wurzel ist; sie ist auch wirklich eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

In der Gleichung $x^3 - 7x^2 + 10x = 15$ wird die Wurzel beinahe 5 gefunden, und der fehlende Theil ist $-2x^2 + 17x - 27$ so ist

$$x^3 - 7x^2 + 10x = 15$$

$$-2x^2 = -50$$

$$17x = 85$$

$$-27 = -27$$

$$x - 3 = \sqrt[3]{23} = 2,84.$$

$x = 5,84$ setzt man diesen Werth in die cubische Näherungsformel statt q so ist

$$x = \frac{388,353 - 238,739 + 15}{102,317 - 81,76 + 10.} = \frac{164,614}{30,557}$$

$= 5,3838 \ldots\ldots$

Aufgaben.

1) A sagte zu B: Ich habe nur 12 Thaler mehr als Du, aber wenn man das Product unseres Geldes mit der Summe desselben multiplicirt, so kommen 14560. Wie viel Thaler hatten beide?

x Thaler hatte B, $(x+12)$ Thaler hatte A, das Product (x^2+12x) und die Summe $2x+12$.

Daher ist

$$(x^2+12x)(2^x+12)=x^3+18x+72x=7280.$$

Da das Zahlenglied groß und viele Factoren hat, so würde es öfters sehr beschwerlich seyn, wenn man die Factoren nach und nach in die gegebene Gleichung substituiren wollte. Man kann aber bei der Erfindung der Wurzeln sich die Rechnung dadurch erleichtern, daß man den dritten Theil des Coefficienten vom zweiten Gliede cubirt und, je nachdem dieses Glied positiv oder negativ ist, zu beiden Theilen der Gleichung addirt oder subtrahirt; dann versuche man die verlangte Wurzel aus beiden Theilen auszuziehen. Hierbei wird man die Wurzel etwas zu klein oder um etwas zu groß erhalten, wenn

es kein reiner Cubus ist. Man findet aber dadurch ungefähr die Wurzel. Z. B.

$$x^3 + 18x + 72x + 216 = 7280 + 216$$

$$x + 6 = \sqrt[3]{7496} = 19.$$

36x der fehlende Theil.

Da aber zu beiden Theilen noch etwas hinzu addirt werden müßte, um die wahre Wurzel zu erhalten, so kann man die Wurzel sogleich etwas größer annehmen. Sie ist in diesem Falle aus dem zweiten Theile 20.

$x = 20 - 6 = 14$ Thaler hatte B

$14 + 12 = 26$ Thaler hatte A.

2) Einige Kaufleute legen eine Summe Geld zusammen und zwar jeder 10mal so viel Thaler, als ihrer sind; mit diesem Gelde gewinnen sie eine Anzahl Procent, welche um 8 größer ist, als die Anzahl der Kaufleute. Der Gewinn beträgt aber 288 Thaler. Wie viel waren Kaufleute?

x Kaufleute, jeder gab zum Handel 10x Thalerund alle $10x^2$ Thaler und $x + 8$ Procent wurden gewonnen.

Es verhält sich daher

$$100:(x+8)=10x^2:\left(\frac{10x^3+80x^2}{100}\right).$$

und

$$10x^3+80x^2=28800$$

$$x^3+8x^2=2880$$

$$x+\tfrac{8}{3}=\sqrt[3]{2880+\frac{512}{27}}=\sqrt[3]{\frac{78272}{27}}=\frac{44}{3}$$ ungefähr

$$x=\tfrac{44}{3}-\tfrac{8}{3}=\tfrac{36}{3}=12$$ Kaufleute.

3) Die Differenz zweier Zahlen ist 16; und wenn man die Differenz der Cubikzahlen dieser beiden Zahlen mit der Summe derselben multiplicirt, so ist das Product = 237536; welche beiden Zahlen sind es?

Da hier die gegebenen Zahlen groß sind, so thut man besser, man nimmt statt der Zahlen Buchstaben an, und bestimmt mit dieser die Gleichung. Z. B. $16=a$, $237536=b$, die kleinere zu suchende Zahl $=x$: so ist die größere Zahl $=x+a$, und die Summe dieser beiden Zahlen $=2x+a$.

Der Cubus der größern Zahl

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

und der kleinern $x^3 = x^3$

Die Differenz beider $= 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

dieses multiplicirt mit der Summe $2x^2 + a$

$$6ax^3 + 6a^2x^2 + 2a^3x$$
$$+ 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4$$

giebt $bax^3 + 9a^2x^2 + 5a^3x + a^4$

Es ist daher

$$6ax^3 + 9a^2x^2 + 5a^3x + a^4 = b$$

$$x^3 + \frac{3ax^2}{2} + \frac{5a^2x}{6} + \frac{a^4-b}{6a} = 0.$$

Setzt man nun in diese Gleichung statt der Buchstaben die gegebenen Werthe:

so ist

$x^3 + 24x^2 + 213\frac{1}{3}x - 1791\frac{2}{3} = 0$. Nun schaffe man die Brüche weg.

$$\frac{1 \quad 3 \quad 9 \quad 27}{x^3 + 72x^2 + 1920x - 48375 = 0}$$

$x^3 + 72x^2 + 1920x = 48375$ deren Wurzeln 3mal größer sind als in der gegebenen.

$$x + 24 = \sqrt[3]{48375 + 13824} = 39$$ ungefähr

$$- 192x$$

$x = 39 - 24 = 15$ da diese Wurzel nun dreimal zu groß ist, so ist die wahre Wurzel $x = \frac{15}{3} = 5$ als die kleinere Zahl und $5 + 16 = 21$ die größere.

4) Man hat zwei Zahlen, deren Summe 63 ist. Wird die größere durch die kleinere dividirt, das, was heraus kommt, mit der größern multiplicirt und zum Producte $20\frac{1}{4}$ addirt, so entsteht eine Cubikzahl, deren Wurzel um eins weniger ist, als der siebente Theil der größern Zahl: Welche Zahlen sind es?

x ist die Wurzel, $x + 1$ der siebente Theil der größern Zahl $7x + 7$ die größere Zahl selbst und $63 - 7x - 7 = 56 - 7x$ die kleinere Zahl.

So ist

$$\left[\left(\frac{7x+7}{56-7x}\right)\times(7x+7)\right]+20\tfrac{1}{4}=a^3$$

$$x^4-8x^3+7x^2-\frac{25x}{4}=-169$$

$$x-2 \qquad =\pm\sqrt[4]{+16-169}=\pm\sqrt[4]{-153}$$

der fehlende Theil $+17x^2-25\frac{3}{4}x$

Da nach der Gleichung die Wurzel positiv ist, so muß zum zweiten Theile 153 und vielleicht auch noch darüber hinzugezählt werden, um die wahre Wurzel zu erhalten. Nimmt man 2 für die Wurzel aus dem zweiten Theile an, so ist $x=4$ und $4+1=5$ als der siebente Theil der größern Zahl und $5\times7=35$ als die größere Zahl und 28 als die kleinere.

Fünftes Kapitel.

Von den Reihen oder Progressionen.

a) Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

F. Wie entstehen arithmetische Verhältnisse?

A. Durch die Vergleichung zweier Zahlen

oder Größen, wobei untersucht wird, um wie viel eine Zahl größer oder kleiner, als eine andere sey; daher nennt man diese Verhältnisse auch Differenz-Verhältnisse. Z. B. 5 und 7, hier ist 7 um 2 größer als 5.

F. Wie nennt man die Größen, welche arithmetisch verglichen werden, auch noch?

A. Die Glieder des Verhältnisses, und zwar unterscheidet man sie auch ins erste und zweite, oder ins Vorder- und Hinterglied. Die Zahl, welche das Verhältniß beider Größen angiebt, nennt man die Verhältnißzahl, oder Differenz. Z. B. 5 das erste, 7 das zweite Glied, und um wie viel das zweite Glied größer oder kleiner als das erste ist, die Differenz hier 2.

F. Wie werden arithmetische Verhältnisse dargestellt?

A. Dies wird verschieden angezeigt, manche trennen die Glieder durch Kommas und andere durch das Zeichen (—); es wird indessen jede dieser Bezeichnungsarten einerlei ausgesprochen. Z. B. 5, 7. oder 5 — 7, 5 zu 7. Oder wenn a das erste Glied, d die Differenz

bedeutet, so kann man auch a, (a + d) oder a, (a — d) jedes arithmetische Verhältniß bezeichnen; denn das zweite Glied ist um die Größe d entweder größer oder kleiner, je nachdem d positiv oder negativ ist. Aus den beiden letzten allgemeinen Ausdrücken ist ohne weitere Erklärung leicht zu sehen, wie man aus dem ersten Gliede und der Differenz das zweite Glied bestimmen könne, oder auch aus dem zweiten Gliede und der Differenz, das erste ꝛc.

F. Wenn sind arithmetische Verhältnisse einander gleich?

A. Insofern sie gleiche Differenzen haben. Z. B. a, (a + d) und m, (m + d) oder in Zahlen $\overset{2}{\smile}$ 5, 7. und $\overset{2}{\smile}$ 9, 11.

F. Werden aber diese Verhältnisse nicht geändert, wenn man zu beiden Gliedern gleichviel hinzu addirt oder davon abzieht?

A. Nein, die Verhältnisse bleiben sich gleich. Z. B.

$$\begin{array}{cc} 5,\ 7. & 5,\ 7. \\ \underline{2.\ \ 2.} & \underline{2.\ \ 2.} \\ 3,\ 5. & 7,\ 9. \end{array}$$

oder (a + c) (a + c + d) oder (a — c), (a — c + d).

Da in diesen Verhältnissen die Differenz

gleich bleibt, so sind auch die Verhältnisse nicht geändert worden.

F. Was versteht man unter einer arithmetischen Proportion?

A. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse, welche durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden werden. Z. B. 5,7 = 9,11 oder $a, (a + d) = m, (m + d)$.

F. Wie benennt man die einzelnen Theile der Proportion 5,7 = 9,21?

A. Die Glieder und zwar 5 das erste, 7 das zweite, 9 das dritte und 11 das vierte Glied; oder auch 5 und 11 die äußern, 7 und 9 die mittleren Glieder der Proportion.

F. Auf welche Art kann man sich von der Richtigkeit einer solchen Proportion überzeugen?

A. Entweder man untersucht, ob die beiden Verhältnisse gleiche Differenzen haben, oder man untersucht, ob die Summe der äußern Glieder gleich sey, der Summe der mittlern; denn in einer richtigen Proportion müssen die beiden Summen einander gleich seyn.

$$\text{Z. B. } \frac{5,7 = 9,11}{5+11 = 7+9.}$$

oder allgemein

$$\frac{a,(a+d) = m,(m+d)}{a+m+d = a+d+m.}$$

F. Wenn aber in einer arithmetischen Proportion ein Glied fehlt oder noch unbekannt ist; wie wird dieß gefunden?

A. Ist es ein äußeres, so findet man es, wenn man die mittlern addirt und von dieser Summe das vorhandene äußere abzieht, der Rest giebt das zu suchende äußere Glied. Z. B. wenn das 4te Glied fehlt, so ist in der Proportion $5,7 = 9,[(7+9) - 5]$ oder 11. Sollte aber ein mittleres fehlen, so findet man dieses, wenn man die äußern Glieder addirt und das vorhandene mittlere davon abzieht, z. B.

$$\frac{5,7 = x,11}{(5+11) - 7 = x = 9.}$$

Allgemeine: $a,b = c,d.$

$$\frac{a,b = c,x}{x = (b+c) - a}$$

Sollte hier d fehlen so ist

$$\frac{a, x = c, d}{x = (a + d) - c.}$$

oder $x = (a + d) - c.$

F. Wie werden aber Proportionen genennt, in denen die mittlern Glieder einander gleich sind?

A. Stetige zusammenhängende Proportionen. Z. B 5, 9 = 9, 13. oder a, b = b, c, oder auch a, a + d, (a + 2 d), indem man das mittlere Glied nur einmal schreibt, und spricht diese Proportion aus: a zu (a + d) zu (a + 2 d).

F. Wie wird hier die Richtigkeit einer Proportion untersucht?

A. Die Summe der äußern Glieder muß gleich seyn, dem doppelten mittlern Gliede. Z. B.

$$\frac{7, 9, 11.}{2 \times 6 = 11 + 7}$$

daher wird das mittlere Glied einer solchen Proportion oder die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden, wenn man die Summe der äußern Glieder durch zwei dividirt. Z. B. $\frac{7 + 11.}{2} = \frac{18}{2} = 9.$ Nach dieser Regel findet man auch die mittlere arithmetische Proportionalzahl von mehrern Größen. Angenommen: Man findet bei einem Versuche

verschiedene Resultate, welches ist dann als das Richtige anzunehmen? Es ist kein Grund vorhanden, welches als das Richtige anzuerkennen ist; deshalb wird das Mittel von den erhaltenen Resultaten genommen. Dieß zu erhalten we den die Resultate addirt und die Summe durch eine solche Zahl dividirt, welche die Anzahl der Resultate angiebt. Z. B. Man schreitet die Entfernung von zwei Gegenständen aus, findet hierbei die Anzahl der Schritte, als:

1ten = 5670.
2 = 5675.
3 = 5673.
4 = 5680.

22698

4) ——— 5674½ Schritt.

Hierbei ist aber noch zu erinnen, daß die Resultate, welche zu sehr abweichen, gänzlich außer Ansatz bleiben, weil bei ihrer Erhaltung Fehler vorgekommen seyn können.

b) Von den arithmetischen Reihen.

F. Was versteht man unter den arithmetischen Reihen?

A. Eine Reihe Größen oder Zahlen, in welcher die Theile nach einem gewissen Gesetz abnehmen oder wachsen. Z. B. 2, 4, 6, 8, 10, 12 u. s. w., hier wächst jedes Glied um 2.

Allgemein:

a, (a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d), a+5d). u. s. w. Hier wird jedes Glied um d größer, als das nächst vorhergehende.

Oder 12, 10, 8, 6, 4, 2; hier wird jedes Glied um 2 weniger, als das nächst vorhergehende.

Allgemein:

(a+6d), (a+5d), (a+4d), (a+3d), (a+2d), (a+d), a.

oder:

a, (a−d), (a−2d), (a−3d), (a−4d), (a−5d), (a−6d). Hier nimmt jedes Glied um d ab.

F. Wie nennt man die Reihen oder Progressionen, wenn die Glieder wachsen, und wie, wenn sie abnehmen?

A. Im ersten Falle steigend und im letztern fallend.

F. Welches sind endliche und welches unendliche Reihen?

A. Endlich ist eine Reihe, wenn die Anzahl der Glieder bestimmt sind, und unendlich

ist eine Reihe, wenn deren Glieder unbestimmt und ohne abzubrechen fortgehen.

F. Kann man aus dem ersten Gliede und der Differenz jedes beliebige Glied außer der Ordnung sowohl bei steigenden als fallenden Reihen finden?

A. Ja; denn man kann sich jede arithmetische Reihe durch den allgemeinen Ausdruck $a, (a+d), (a+2d), (a+3d) (a+4d)$ u. s. w. oder $a, (a-d), (a-2d), (a-3d) (a-4d)$ vorstellen.

Es besteht daher bei einer steigenden Reihe jedes Glied aus dem ersten und der Differenz so vielmal genommen, als diesem Gliede überhaupt Glieder vorausgehen; so daß das n^{te} Glied $a + (n - 1) d$ ist. Bei einer fallenden Reihe aber besteht das n^{te} Glied aus dem ersten, weniger der Differenz, so vielmal genommen, als diesem Gliede Glieder voranstehen. Z. B. das $6^{t.}$ Glied soll gefunden werden von einer Reihe, deren erstes Glied $= a$ und die beständige Differenz $= d$; so ist dieses $= a + 5 d$.

Die Reihe würde seyn:

a,	$(a+d)$,	$(a+2d)$,	$(a+3d)$,	$(a+4d)$,	$(a+5d)$
1.	2.	3.	4.	5.	6.

Oder das erste Glied sey = a, die Differenz = — d; so ist das 12te Glied = a — 11 d.

F. Wäre aber das erste und letzte Glied und die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe bekannt, und man sollte aus diesem die Differenz finden, wie würde dies geschehen?

A. Man zieht das erste vom letzten Gliede ab und dividirt den Rest durch die Anzahl der Glieder weniger eins. Z. B. das erste Glied sey a, das letzte a + 10 d, und die Anzahl der Glieder 11; so ist $\frac{a + 10\ d - a}{10} = d$.

F. Wie wird aber die Summe einer solchen Reihe gefunden?

A. Man setze unter die Glieder einer Reihe diese Glieder wieder, aber in umgekehrter Ordnung, und so wird man finden, daß die über einander stehenden Glieder gleiche Summen geben, nämlich so viel, als die Reihe Glieder hat. (Hieraus wird man wahrnehmen, daß die Glieder, welche gleich weit vom Anfange und Ende der Reihe entfernt

stehen, gleiche Summen geben; bei einer ungeraden Anzahl der Glieder würde das mittlere doppelt zu nehmen seyn). Z. B.

$$\begin{array}{l} a, (a+d), (a+2d) \ldots (a+(n-3)d), (a+(n-2)d), (a+(n-1)d) \\ \underline{(a+(n-1)d), (a+(n-2)d), (a+(n-3)d) \ldots (a+2d), (a+d)\, a.} \\ 2a+(n-1)d,\ 2a+(n-1)d,\ ----\ 2a+(n-1)d. \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12. \\ 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2. \\ \hline 14, & 14, & - & - & 14, & 14. \end{array}$$

Mithin ist die Summe dieser Summen $= 14 \times$ der Anzahl der Glieder. Ist die Anzahl der Glieder n, so ist auch $14 \times n = 14\,n$; oder $[2a \times (n-1)d] \times n = 2an + (n-1)nd = 2an + n^2d - nd$. Diese Summe ist aber der doppelten Summe der gegebenen Reihe gleich, denn es sind alle Glieder zweimal in Rechnung gekommen. Benennt man die Summe einer Reihe von n Gliedern mit S, so ist auch

$$\frac{2S = 2an + n^2d - nd}{S = an + \frac{(n-1)nd}{2}} \text{ oder } S = \frac{14n}{2} = 7n.$$

Man findet daher die Summe einer jeden arithmetischen Reihe, wenn man das erste und

letzte Glied addirt und die Summe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt.

F. Da aber in jeder Reihe fünf Größen angegeben sind, welche theils bekannt, theils unbekannt seyn können, wie würde man aus den bekannten Größen die unbekannten finden?

A. Benennt man in einer arithmetischen Reihe das n^{te} oder allgemeine Glied mit G, die Summe mit S, das erste Glied mit a, die Differenz mit d und die Anzahl der Glieder mit n; da nun das letzte Glied einer jeden Reihe $a + (n - 1) d$ und die Summe $an + \frac{(n-1) nd}{2}$ oder $\frac{1}{2} n (a + G)$ sind; so ist auch $G = a + (n - 1) d$ und $S = an + \frac{(n-1) nd}{2}$ oder $= \frac{1}{2} n (a + G)$. Aus diesen Gleichungen können daher für eine jede dieser fünf Größen-Formeln abgeleitet werden, nach welchen man sie aus drei andern gegebenen berechnet.

3. B. $G = a + (n - 1) d$; so ist $a = G - dn + d$.	soll in dieser Gleichung G, n und d bekannt seyn,

Das erste Glied a wird aus der Summenformel $S = \frac{1}{2} n (a + G)$ gefunden

$$S = \frac{m}{2} + G \frac{n}{2}$$

$$2S = an + Gn$$

$$an = 2S - Gn$$

$$a = 2\frac{S}{n} - G.$$

So wie die beiden Formeln für a gefunden wurden, findet man auch die Formeln für die übrigen Größen, so daß man für eine jede 4 Formeln entwickeln kann; diese Formeln sind:

$$G = a + (n-1)d = 2\frac{S}{n} - a$$
$$- \frac{1}{2}d$$
$$= \frac{S}{n} + \frac{1}{2}(n-1)d = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2dS + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}.$$

$$a = G - dn + d = 2\frac{S}{n} - G$$
$$= \frac{S}{n} - \frac{(n-1)}{2}d = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{G^2 + dG + \frac{1}{4}d^2 - 2dS}.$$

$$d = \frac{G-a}{n-1} = \frac{2S-2an}{n(n-1)} = \frac{G^2-a^2}{2S-G-a} = \frac{2Gn-2S}{n(n-1)}$$

$$n = 1 + \frac{G-a}{d} = \frac{2S}{G+a} = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{G}{d} \mp \sqrt{\frac{G2}{d^2} + \frac{G}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S.}{d.}}$$

$$S = \frac{n(a+G)}{2} = an + \frac{dn(n-1)}{2}$$

$$= \frac{a+G}{2} + \frac{G^2 - a^2}{2d} = Gn - \frac{(n-1)nd}{2}.$$

Aus diesen Formeln läßt sich für jeden Fall aus den gegebenen Größen die unbekannte bestimmen. Die Anwendung dieser Formel für arithmethische Reihen soll in den nachfolgenden Aufgaben gezeigt werden.

1. Aufgabe:

400 Thaler sollen dergestalt unter 9 Personen vertheilt werden, daß der folgende jedesmal 4 Thaler mehr bekomme, als der nächst vorhergehende. Was erhält ein jeder?

$S = 400$	Aus der Summe, der Differenz
$n = 9$	und der Anzahl der Glieder be=
$d = 4$	stimme man das erste Glied a.

Es ist

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2} = \frac{400}{9} - \frac{(9-1)4}{2} = \frac{256}{9} = 28\tfrac{4}{9}$$

Thaler erhält der 1ste, $32\frac{4}{9}$ d. 2te, $36\frac{4}{9}$ d. 3te u. s. w.

2. Vier Personen erhalten eine Summe Geld, wovon der Erste 600 Thaler, der Zweite 694 Thaler erhält; die Antheile der folgenden

sollen in gleichem Verhältniß stehen. Wie viel bekommt der Vierte und wie groß war die zu vertheilende Summe?

Das letzte Glied G soll gefunden werden.

Gegeben ist $a = 600$
$n = 4$
$d = 94$

$G = a + (n-1)\,d = 600 + 3.\,94 = 882$ Thaler erhält der Vierte.

Die Summe

$$S = \frac{n\,(a+G)}{2} = \frac{4\,(600+882)}{2} = 2964 \text{ Thaler.}$$

3. Man weiß aus Versuchen, daß ein fallender Körper im luftleeren Raume in der ersten Secunde einen Raum von ungefähr $15\frac{5}{8}$ Fuß durchfällt, in jeder folgenden Secunde aber immer um $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr als in der zunächst vorhergehenden. Wenn nun ein Körper 20 Secunden gefallen ist: wie viel Fuß wird er in der letzten Secunde zurück legen? Und wie viel in der ganzen Zeit?

$a = 15\frac{5}{8}$ $G = 15\frac{5}{8} + 19.\,31\frac{1}{4} = 609\frac{3}{8}$ Fuß fällt
$d = 31\frac{1}{4}$ der Körper in der letzten Secunde.
$n = 20$ $S = \frac{20\,(15\frac{5}{8} + 609\frac{3}{8})}{2} = 6250$ Fuß in der ganzen Zeit.

4. Aus wie viel Gliedern besteht eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied 3 die Differenz 5 und das letzte Glied 438 ist?

$a = 3$ Die Anzahl der Gieder

$d = 5$ $n = 1 + \frac{G - a}{d} = 1 + \frac{438 - 3}{5} = 88$ Glieder.

$G = 438$

5. Jemand giebt 3500 Thaler zu 4 Procent auf Zinsen, legt jedes Jahr eine gleiche Summe zu und erhält in 24 Jahren 6672 Thlr. an Zinsen. Wie viel wurde jährlich zum Capital gelegt?

$100 : 4 = 3500 : 140$ Thaler Interessen des anfänglichen Capitals auf das erste Jahr.

Daher ist

$a = 140$ Die Differenz der Interessenreihe ist

$S = 6672.$ $d = \frac{2S - 2an}{n(n-1)} = \frac{6624}{552} = 12$ Thaler,

$n = 24$

als die Intressen, welche man von dem zugelegten Capitale jährlich erhält.

$4 : 100 = 12 : 300$ Thaler, welche jährlich zugelegt werden.

6. Wie groß ist das erste Glied einer arithmetischen Progression von 22 Gliedern, wenn die Differenz $\frac{2}{3}$ und das letzte Glied 15 ist?

Das erste Glied $a = G - dn + d = 15 - \frac{44}{3} + \frac{2}{3} = 1.$

c) Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

Die Erklärung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen wird hier nur in so fern abgehandelt, als es der angeführte Zweck erfordert, da vorausgesetzt wird, daß derjenige, welcher Algebra studiren will, schon aus der Zahlenrechnung die geometrischen Proportionen hinlänglich erlernt hat.

F. Wie werden die geometrischen Verhältnisse ausgedrückt?

A. Wenn man das erste Glied a und den Exponenten e setzt, so kann jedes geometrische Verhältniß durch a : ae ausgedrückt werden. Ist hier das zweite Glied größer als das erste, so ist der Exponent e eine ganze oder auch eine gemischte Zahl und das Verhältniß wird steigend, im entgegengesetzten Falle aber fallend genannt.

F. Wie wird aus dem ersten Gliede und dem Exponenten das zweite Glied gefunden?

A. Das zweite Glied besteht aus dem Producte des ersten Gliedes mit dem Exponenten. Oder man findet das zweite Glied, wenn

man das erste mit dem Exponenten multiplicirt. Und umgekehrt findet man das erste aus dem zweiten und dem Exponenten, wenn das zweite Glied durch den Exponenten dividirt wird.

F. Wenn sind zwei Verhältnisse einander gleich?

A. Wenn sie gleiche Exponenten haben. Z. B. a : ae und b : be.

F. Werden die geometrischen Verhältnisse geändert, wenn man die Glieder durch irgend eine Größe m multiplicirt oder dividirt?

A. Nein; sie behalten das anfängliche Verhältniß. Z. B.

a : ae mit m multipl. giebt am : ame
oder b : be = m dividirt = $\frac{b}{m} : \frac{be}{m}$
} Beide haben noch den Exponenten e.

In Zahlen 12 : 48 hier ist der Exponent 4; dieses Verhältniß durch 3 multipl. giebt 36 : 144
und = 9 dividirt = 4 : 16
Beide haben noch den Exponenten 4.

F. Wie entsteht eine geometrische Proportion?

A. Wenn man zwei gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbindet. Z. B. a : ae = b : be.

F. Wie kann man sich von der Richtigkeit einer Proportion überzeugen?

A. Es muß auch hier das Product der äußern Glieder gleich seyn dem Producte der mittlern. Z. B. $\underline{a : ae = b : be}$

$$abe = abe.$$

F. Welche Veränderungen kann man mit den Gliedern einer geometrischen Proportion, unbeschadet deren Richtigkeit, vornehmen?

A. Man kann alle Glieder durch eine Zahl multipliciren oder dividiren, oder zu irgend einer Potenz erheben, und umgekehrt die n Wurzel extrahiren. Eben so lassen sich auch diese Veränderungen mit einem äußern und einem mittlern Gliede vornehmen. Z. B.

$$a : ae = b : be$$

$$a^2 : a^2 e^2 = b^2 : b^2 e^2$$

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{a^2 e^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{b^2 e^2}$$

$$\frac{a}{c} : ae = \frac{b}{c} : be$$

In Zahlen

$$2 : 4 = 6 : 12$$
$$4 : 16 = 36 : 145$$
$$\sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{36} : \sqrt{144}$$
$$\tfrac{2}{3} : 4 = \tfrac{6}{3} : 12$$
$$\tfrac{2}{4} : \tfrac{4}{4} = 6 : 12$$
$$\tfrac{2}{2} : \tfrac{4}{2} = \tfrac{6}{3} : \tfrac{12}{3}$$
$$2 : 4.2. = \tfrac{6}{2} : 12$$

Aus diesen Veränderungen wird man wahrnehmen, wie sich die Glieder einer geometrischen Proportion in andere Zahlen ausdrücken lassen, ohne die Richtigkeit der Proportion zu stören. Es ist aber auch Anfängern nicht genugsam zu empfehlen, sich ganz vertraut mit diesen Proportionen zu machen, denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften.

F. Kann man auch die Glieder einer Proportion versetzen, ohne die Richtigkeit zu stören?

A. Ja; die Glieder einer Proportion können acht verschiedene Stellungen annehmen und bleiben demohngeachtet immer in richtiger Proportion, weil das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern Glieder gleich bleibt. Z. B.

1) $a : ae = b : be$

2) $a : b - ae : be$

3) $ae : a = be : b$

4) $ae : be = a : b$

5) $b : be = a : ae$

6) $b ; a = be : ae$

7) $be : b = ae : a$

8) $be : ae = b : a$

In Zahlen.

1) $2 : 4 = 6 : 12$

2) $2 : 6 = 4 : 12$

3) $4 : 2 = 12 : 6$

4) $4 : 12 = 2 : 6$

5) $6 : 12 = 2 : 4$

6) $6 : 2 = 12 : 4$

7) $12 : 4 = 6 : 2$

8) $12 : 6 = 4 : 2$

F. Was versteht man unter stetigen Proportionen?

A. Deren mittlere Glieder einander gleich sind. Z. B. $a : ae = ae : ae^2$ Oder $4 : 6 = 6 : 9$ Gewöhnlich aber werden diese Proportionen geschrieben: $a : ae : ae^2$ oder $4 : 6 : 9$

Von der Richtigkeit einer solchen Proportion überzeugt man sich, wenn das Produkt der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern gleich ist.

F. Wie wird aber in einer solchen Proportion ein fehlendes Glied gefunden?

A. Stellt man sich die Glieder in einer stetigen Proportion durch a : b : c vor, so ist $ac = b^2$; $c = \frac{b^2}{a}$; $a = \frac{b^2}{c}$; $b = \sqrt{ac}$; aus zwei gegebenen Gliedern kann man hieraus das Fehlende finden.

d. Von den geometrischen Reihen.

F. Was hat man sich unter einer geometrischen Reihe zu denken?

A. Eine Reihe Größen, von denen jede eine bestimmte Anzahl mal größer oder kleiner ist, als die zunächst vorhergehende. Z. B. 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 u. s. w. oder 729 : 243 : 27 : 9 : 3 : 1.

F. Wie nennt man die einzelnen Theile einer solchen Reihe, und die Größe, um wie viel mal die Theile größer oder kleiner werden?

A. Die einzelnen Theile heißen die Glieder, und die Größe um wie viel mal die Glieder wachsen oder abnehmen, nennt man die Exponenten.

F. Wie erhält man den Exponenten?

A. Wenn man mit einem vorhergehenden Gliede in das folgende dividirt, der Quotient ist der Exponent. Z. B. von der Reihe: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 u. s. w. ist der Exponent 2 oder 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1 hier ist der Exponent $\frac{1}{3}$.

Eine solche Reihe ist leicht zu bilden, wenn man das erste Glied und den Exponenten kennt; man multiplicire nur das erste Glied mit dem Exponenten, so wird man das folgende Glied finden. Nennt man das erste Glid = a, den Exponenten = e, so ist die allgemeine Reihe $a : ae : ae^2 : ae^3 : ae^4$ u. s. w.

Es besteht daher ein jedes Glied aus dem Produkte des ersten Gliedes a mit dem zu einer solchen Potenz erhobenen Exponenten e, als diesem Gliede Glieder vorausgehen. Da-

her würde das nte Glied einer Reihe $G = ae^{n-1}$, seyn.

F. Welche Eigenschaften hat eine geometrische Reihe noch überdies?

A. Daß die auf einander folgenden und gleich weit aus einander stehenden Glieder gleiche geometrische Verhältnisse bilden. B. Z. $a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4 = ae^4$ u. s. w. Ferner, daß das Produkt der beiden äußern gleich sey dem Produkt zweier mittlern, welche von den äußern gleich weit abstehen. Z. B. $a \times ae^{n-1} = ae^{n-2}$; oder in der Zahlenreihe:

$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 \ldots$

$$1 \times 64 = 2 \times 32 = 16 = 8 \times 8.$$

F. Wie wird aber die Summe einer solchen Reihe gefunden?

A. Wenn man das erste Glied vom letzten abzieht, und die Differenz durch den um eins verminderten Exponenten dividirt, und zu dem Quotienten das letzte Glied addirt; so bekommt man die Summe der ganzen Progression. Oder wenn man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplicirt, das erste Glied davon

abzieht und die Differenz von dem um eins verminderten Exponenten dividirt. Z. B. das letzte Glied sey ae^{n-1} und das erste Glied a, so ist

$$\frac{ae^{n-1} - a}{e - 1} + ae^{n-1} \text{ oder } \frac{(ae^{n-1} \times e) - a}{e - 1} = \frac{ae^{n} - a}{e - 1}$$

F. Wie überzeugt man sich von der Richtigkeit der hier gegebenen Summenformel?

A. Bildet man aus den auf einander folgenden Gliedern der Reihe $a : ae : ae^2 : ae^3 : \ldots ae^{n-1}$ die gleichen Verhältnisse $a : ae = ae : ae^2$, so wird sich die Summe der Vorderglieder zu der Summe der Hinterglieder verhalten, wie sich ein jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält.

Es ist daher die Summe der Vorderglieder dieser Verhältnisse, der Summe der n gegebenen Glieder weniger dem letzten, wenn die Summe $= S$, so auch $S - ae^{n-1}$ die Summe der Vorderglieder und die Summe der Hinterglieder dieser Verhältnisse ist die Summe der gegebenen n Glieder weniger dem ersten gleich, d. i. $S - a$. Nun verhält sich aber auch

$$(S - ae^{n-1}):(S - a) = a : ae \text{ oder } 1 : e$$

$$eS - ae^{n} = S - a$$

$$eS - S = ae^{n} - a$$

$$S = \frac{ae^{n} - a}{e - 1}$$

F. Was muß von einer geometrischen Reihe bekannt seyn, um die ganze Reihe zu finden?

A. Wenigstens drei Größen müssen bekannt seyn, um die übrigen daraus folgern zu können.

F. Kann man für die übrigen Größen auch Formeln entwickeln, so wie es für die Summe und das allgemeine Glied geschah?

A. Ja; aus den Formeln für die Summe und des allgemeinen Gliedes lassen sich für jede Größe vier Formeln und Gleichungen ableiten. Z. B.

$$G = ae^{n-1}$$

$$a = \frac{G}{e^{n-1}}$$

$$G = ae^{n-1}$$

$$e^{n-1} = \frac{G}{a}$$

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{G}{a}}$$

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$$

$$eS - S = ae^n - a$$

$$a(e^n - 1) = S(e - 1)$$

$$a = \frac{S(e - 1)}{e^n - 1}$$

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$$

$$S = a\frac{(e^n - 1)}{e - 1}$$

$$S = \frac{G(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}$$

$$eS - S = \frac{G(e^n - 1)}{e^{n-1}}$$

$$e^{n-1} S(e - 1) = G(e - 1)$$

$$S = \frac{G(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man für eine jede der fünf Größen die vier Gleichungen

$$G = ae^{n-1} = \frac{a + (e - 1)S}{e} = \frac{e^{n-1}(e - 1)S}{e^n - 1}$$

und die höhere Gleichung

$$G(S - G)^{n-1} - a(S - a)^{n-1} = 0$$

$$a = \frac{G}{e^{n-1}} = Ge - (e-1)S = \frac{(e-1)S}{e-1}$$

und die Gleichung $a(S-a)^{n-1} - G(S-G)^{n-1} = O$

$$a = \sqrt[n-1]{\frac{G}{a}} = \frac{S-a}{S-G}$$ und die höhern Gleichungen

$$e^n - \frac{Se}{a} + \frac{S-a}{a} = O.$$

$$\text{und } e^n - \frac{Se^{n-1}}{S-G} + \frac{G}{S-G} = O$$

$$S = \frac{Ge-a}{(e-1)} = a\,\frac{(e^n-1)}{e^{n-1}(e-1)} = G\,\frac{(e^n-1)}{e^{n-1}e-)}$$

$$\left(\frac{n}{G^{n-1}} - \frac{n}{a^{n-1}}\right) : \left(\frac{1}{G^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

Für n $e^n = \frac{Ge}{a} = \frac{Ge}{Ge-(e-1)\,S} = \frac{a+(e-)S}{a}$

$$\text{und } e^{n-1} = \frac{G}{a}.$$

Da in den vier letzten Gleichungen die Größe n als Exponent erscheint und nach den jetzt erklärten Regeln sich erst mit der Lehre von den Logarithmen bestimmen läßt, so werden überhaupt die Aufgaben von den geometrischen Reihen bis dahin verschoben.

Sechstes Kapitel.

Eigenschaften und Gebrauch der Logarithmen.

F. Was versteht man unter Exponentialgrößen?

A. Wenn die unbekannte oder veränderliche Größe als Exponent erscheint. So war in den letzten Gleichungen von den geometrischen Reihen die unbekannte Größe n als Exponent vorhanden, weshalb man sie Exponentialgrößen nennt.

F. Wie wird aber der Werth einer solchen Exponentialgröße gefunden?

A. Um diese Frage zu beantworten, müssen erst die Logarithmen genauer betrachtet werden.

F. Was sind Logarithmen?

A. Eine Reihe Zahlen, die in einer geometrischen Progression fortgeht, und zum Exponenten das erste Glied hat; diese Exponenten bilden eine arithmetische Reihe, welche zur Differenz das erste Glied dieser Reihe hat; die Glieder in der arithmetischen Reihe sind dann die Logarithmen von den Gliedern der

geometrischen Reihe, bei welchen sie darüber oder darunter stehen. Beide Progressionen machen das Logarithmen = System aus. Z. B. Es sind die beiden Progressionen:

$= 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512$

$= 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7 : 2^8 : 2^9$

$= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$

Oder allgemein:

$= a : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : a^9$

$= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$

Daher heißt der Logarithmus auch die Verhältnißzahl.

F. Welche Eigenschaften bemerkt man noch an diesen beiden Reihen?

A. Daß, wenn man zwei Glieder in der arithmetischen Reihe addirt, die Summe unter dem Gliede der geometrischen Reihe steht, welches man zum Produkte erhalten haben würde, wenn die beiden Glieder der geometrischen Reihe, welche gerade über den addirten Gliedern der arithmetischen Reihe stehen, multiplicirt worden wären. Dividirt man aber zwei Glieder in der geometrischen Progression, und zieht die Glieder der arithmetischen Reihe, welche sich

unter den Gliedern der ersten Reihe befinden, von einander ab, so wird in dem ersten Falle der Quotient und im letzten Falle die Differenz in einem Gliede übereinander stehn.

Wenn ferner ein Glied in der geometrischen Progression zum Quadrate erhoben werden soll, so multiplicire man das darunter stehende Glied der arithmetischen Reihe mit zwei, das Produkt wird dann unter dem Quadrate der geometrischen Reihe stehn.

Wird endlich die vierte Potenz aus einem Gliede der geometrischen Reihe verlangt, so, dividire man das Glied der arithmetischen Reihe, welches unter dem Gliede der geometrischen steht, durch viere; der Quotient wird dann unter dem Gliede der geometrischen Reihe stehn, welches die verlangte Wurzel ist, z. B.

$= 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512$

$= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$

Es ist daher $8 \times 64 = 512.$

und $3 \times 6 = 9.$

Oder $256 : 16 = 16.$

und $8 - 4 = 4.$

Eben so auch $8^2 = 46$.
und $3.2 = 6$.
Endlich $\sqrt[4]{256} = 4$.
und $\frac{8}{4} = 2$.

Hieraus ist zu ersehen, daß, wenn man zwei Zahlen mit einander zu multipliciren hat, nur die Logarithmen dieser beiden Factoren zu addiren sind.

Eben so zieht man die beiden Logarithmen von einander ab, wenn die dazu gehörenden Zahlen in einander zu dividiren sind.

Soll eine Zahl zu irgend einer Potenz erhoben oder die Wurzel ausgezogen werden, so multiplicirt man in dem ersten Falle den dazu gehörenden Logarithmus mit der Potenz, zu welcher die Zahl erhoben werden soll; im zweiten Falle dividirt man den Logarithmus durch die Potenz.

F. Kann bei einem Logarithmen = System das erste Glied in der geometrischen Progression nicht mit eins anfangen?

A. Ja; denn es läßt sich der Logarithmus eines Quotienten als den Unterschied der Logarithmen des Dividendus und des Divi=

sors annehmen. Da nun die Einheit weder das Produkt noch den Quotienten verändert, so verändert auch die Null weder die Summe noch den Unterschied der Logarithmen.

F. Eignen sich willkührlich angenommene geometrische Reihen zu dem Logarithmen-System?

A. Ja; da die geometrische Hauptreihe allemal mit eins und die arithmetische mit Null anfängt und das zweite Glied der geometrischen Reihe zum Logarithmus 1 hat, so können auch mehrere Logarithmen-Systeme gebildet werden. Unter allen Systemen aber ist folgende zum practischen Gebrauch die bequemste, als:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

und nennt es das Brigg'sche oder gemeine Logarithmen-System.

F. Da hier die Glieder einer geometrischen Reihe Logarithmen enthalten, werden denn die Zahlen, welche zwischen diese Glieder fallen, auch dergleichen Logarithmen haben?

A. Ja; alle mögliche Zahlen haben ihre Logarithmen, und sie sind auch auf weitläuftigen und mühsamen Wegen berechnet, in den soge-

nannten Logarithmen = Tafeln eingetragen worden. Es können aber die Logarithmen von der zwischenfallenden Zahl keine ganze Zahl seyn.

F. Wie werden aber die Logarithmen von den zwischenfallenden Zahlen beschaffen seyn müssen?

A. Die Logarithmen der Zahlen von 2 bis 9 müssen kleiner als 1, d. h. sie müssen Brüche seyn; die Logarithmen der Zahlen von 11 bis 99, größer als 1, aber kleiner als 2; die Logarithmen der Zahlen von 101 bis 999 werden zwischen 2 und 3 fallen, u. s. w.

Da hier die Logarithmen Brüche sind, so hat man sie zum leichtern Gebrauch in Dezimalbrüche verwandelt, wodurch sich aber die Logarithmen nicht vollkommen genau bestimmen lassen. In jemehr Dezimalstellen sie aber gesucht werden, desto genauer sind sie. Die gewöhnlichen Tafeln enthalten sie mit 7 Dezimalstellen für die Grundzahl 10 berechnet.

F. Da ein Logarithmus theils aus Brüchen, theils aus Ganzen, theils aus beiden zugleich besteht, wie heißen die Ganzen und Brüche noch besonders?

A. Die Ganzen vor dem Dezimalbruche nennt man die Charakteristik, oder die Kennziffer, so wie den Dezimalbruch die Mantisse.

F. Warum heißen die Ganzen vor dem Dezimalbruche die Kennziffer?

A. Weil sich aus dieser erkennen läßt, wieviel Ziffern die natürliche Zahl enthält, den die Kennziffer begreift eine Einheit weniger, als die natürliche Zahl Ziffern hat, z. B.

1.	hat	zum	Logarithmus		0.	Ganze.
10.	=	=	=	=	1.	=
100.	=	=	=	=	2.	=
1000.	=	=	=	=	3.	=
10000.	=	=	=	=	4.	u. s. w.

F. Giebt es nicht auch Logarithmen, welche gleiche Mantissen haben?

A. Ja; z. B. log: 2 = 0, 3010300
und log: 20 = 1, 3010300
log: 200 = 2, 3010300.

Oder log: 37 = 1, 5682017.
log: 370 = 2, 5682017

Hier sind sie nur in Ansehung ihrer Kennziffern verschieden. Eben so hat der Dezimalbruch, 56, 78 mit der ganzen Zahl 5678 eine

gleiche Mantisse, da sie aus gleichen Ziffern bestehen, und nur die Kennziffern verschieden sind, z. B.

log: 56,78 = 1, 7541954

log: 5678 = 3, 7541954

F. Wie wird von einer gegebenen Zahl der Logarithmus in den Tafeln gefunden?

A. Man suche die gegebene Zahl in den Tafeln, und zwar in einer mit N. bezeichneten Spalte auf, so wird der Logarithmus in der nächsten Spalte angetroffen werden. Sollte die Kennziffer in den Tafeln nicht angegeben seyn, so wird man sie, nach obiger Feststellung, leicht hinzufügen können, z. B.

log: 567 = 2,7535831.

log: 1728 = 3,2375437.

F. Wie wird aber der Logarithmus gefunden, wenn der natürlichen Zahl rechts noch Nullen angehangen sind?

A. Man bestimme aus der natürlichen Zahl die Kennziffer und suche dann den Logarithmus von den bedeutlichen Ziffern, nehme davon die Mantisse und setze solche zu der dazu gehörigen Kennziffer, z. B.

log: 172000 = 5, 2355284.

log: 2368000 = 6, 3743817.

F. Wie läßt sich aber der Logarithmus von einer Zahl finden, welche aus mehr Ziffern besteht, als in den Tafeln angegeben sind?

A. Läßt sich die gegebene Zahl in solche Factoren zerfällen, von denen man die Logarithmen in den Tafeln aufsuchen kann, so addire man nur die Logarithmen von diesen Factoren und man wird den verlangten Logarithmus erhalten, z. B. es soll von der Zahl 127232 der Logarithmus gefunden werden, so ist:

127232 = 31808 × 4 = 3976 × 4 × 8
= 3976 × 32 = log: 3967 + log 32.

Es ist daher log: 3976 = 3, 5994464
und log: 32 = 1, 5051500.

log: 127232 = 5, 1045964.

Läßt sich aber die gegebene Zahl nicht in Factoren zerfällen, so schneide man von der linken nach der rechten Hand eben so viel Ziffern als Ganze ab, für welche man den Logarithmus in den Tafeln finden kann. Hierauf suche man zu den abgeschnittenen Ziffern und zu der nächst größern Zahl die Logarithmen, in-

dem die Kennziffern nach der gegebenen Zahl berichtiget worden und zieht sowohl die natürlichen Zahlen als die Logarithmen von einander ab. Endlich suche man zu den beiden Unterschieden und den weggelassenen Ziffern die vierte Proportionalzahl, welche, zu den schon gefundenen Logarithmus addirt, den verlangten Logarithmus giebt. Z. B. der Logarithmus von 127232 soll gefunden werden, so ist 127200 + 32 auch gleich der gegebenen Zahl.

Es ist daher 127200 = 5, 1044871.
und die nächst größere Zahl 127300 = 5, 1048284.

Differenz der Zahlen 100 = d. log: 3413

Es verhält sich daher

$$100 : 3413 = 32 : \frac{3413 \times 32}{100} = 1092, 16.$$

Addirt man dieses zu dem Logarithmus
von 127200 = 5, 1044871
1092

so ist der Logarith. von 127232 = 5, 1045963.

F. Wie wird der Logarithmus von einem Bruche gefunden?

A. Da ein Bruch nichts anders beabsichtigt, als daß der Zähler durch den Nenner

dividirt werden soll, so zieht man den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers ab; der Rest giebt den Logarithmus für den Bruch. Hierbei ereignet es sich aber auch, daß der Zähler kleiner als der Nenner ist, in welchem Falle der Logarithmus des Zählers vom Logarithmus des Nenners abzuziehen ist und der Rest das Zeichen minus erhält, z. B. der Logarithmus von $\frac{8}{5}$ soll gefunden werden:

so ist log: 8 = 0, 9030900
log: 5 = 0, 6989700

Daher ist log: $\frac{8}{5}$ = 0, 2041200.

Von $\frac{5}{8}$ ist der Logarithmus aber:

log: 5 = 0, 6989700
log: 8 = 0, 9030900

log: $\frac{5}{8}$ = − 0, 2041200.

F. Was versteht man unter einem halbpositiven Logarithmus?

A. Wenn ein negativer Logarithmus von einer ganzen Zahl, welche um eine Einheit größer, als die Ganzen des Logarithmus ist, abgezogen und die Zahl, von welcher man abzieht, wieder als Kennziffer an den Rest rechts mit dem Zeichen minus angehangen wird, z. B.

$$\begin{array}{rl} 2 & -2 \\ -0,2041200 & \\ \hline 1,7958800 & -2 \\ \hline \end{array}$$

oder auch $0,7958800 - 1.$

Die halbpositiven Logarithmen werden übrigens in den Rechnungen eben so behandelt, wie andere mit den Zeichen + und —. Da aber die halbpositiven Logarithmen in vielen Fällen die Rechnungen erleichtern, so werden die negativen Logarithmen gewöhnlich in der halbpositiven Gestalt aufgesucht und zwar von dem obigen Bruche $\frac{5}{8}$ auf folgende Weise:

$$\begin{array}{rll} \log: 5 & = 0,6989700 & \\ & +1 & -1. \\ -\log: 8 & = -0,9030900 & \\ \hline \log: \frac{5}{8} & = 0,7958800 & -1. \end{array}$$

Oder von dem Bruche $\frac{7}{144}$;

$$\begin{array}{rll} \text{so ist } \log: 7 & = 0,8450980 & \\ & +2 & -2. \\ \log: 144 & = 2,1583625 & \\ \hline \log: \frac{7}{144} & = 0,6867355 & -2. \end{array}$$

F. Wie werden aber die Logarithmen von Dezimalbrüchen gefunden?

A. Man sucht sie eben so, als wenn es ganze Zahlen wären und vorwärts gar keine Nullen hätten, schreibt aber an die Stelle der Kennziffern eine Null und setzt rückwärts an die Mantisse eben so viel Einheiten mit den Zeichen — als der gegegebene Dezimalbruch links Nullen hat. Z. B.

log: 0, 347. = 0, 5403295 — 1.
log: 0, 0347. = 0, 5403295 — 2.
log: 0, 000299. = 0, 4756712 — 4.
u. s. w.

F. Wenn aber ein solcher halbpositiver Logarithmus durch irgend eine Zahl zu dividiren wäre, wie erfolgt dies?

A. Ist die negative Kennziffer so beschaffen, daß sie durch eine gegebene Zahl ohne Rest dividirt werden kann, so ist es keiner Schwierigkeit unterworfen; außerdem aber muß man die negative Kennziffer um so viel Einheiten größer annehmen, bis diese durch die gegebene Zahl dividirt werden kann. So viel Einheiten man der negativen Kennziffer giebt, müssen auch vor der Division als Ganze gesetzt werden. Z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{4}{5}} = \frac{\log: 4 - \log: 5}{3} = \frac{0,9030900 - 1.}{3}$$

Um diesen Logarithmus dividiren zu können, muß man zur negativen Kennziffer 1 noch 2 Einheiten rechnen, eben so viel aber auch als Ganze; so ist $\frac{2,9030900 - 3}{3} = 0,9676967 - 1.$

Eben so auch

$$\sqrt[5]{\tfrac{7}{144}} = \frac{0,6867355 - 2}{5} = \frac{3,6867355 - 5}{5}$$

$= 0,7373751 - 1.$

F. Wie findet man aber zu einem gegebenen Logarithmus von 7 Dezimalen die dazu gehörende natürliche Zahl?

A. Man suche in den Tafeln einen Logarithmus, welcher mit den gegebenen genau übereinstimmt, so wird die dazu gehörende natürliche Zahl neben diesem Logarithmus in der Spalte der natürlichen Zahlen anzutreffen seyn, z. B. zu dem Logarithmus 3,8321895 ist die natürliche Zahl 6795.

Oder log: 0,9542425 = 9.
log: 2,9391197 = 869,2.
log: 0,6017341 = 3,997.
log: 0,0394141 = 1,095.
log: 0,0060380 = 1,014.

F. Wie wird aber die natürliche Zahl gefunden, wenn der Logarithmus nicht genau in den Tafeln anzutreffen ist?

A. Hat der Logarithmus eine größere Zahl zur Kennziffer, als die natürlichen Zahlen in den Tafeln geben, so suche man in jedem Falle den nächst größern und den nächst kleinern Logarithmus auf und ziehe den kleinern von den größern ab. Eben so suche man die logarithmische Differenz des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen; endlich suche man auch noch die Differenz der nächst größern und nächst kleinern natürlichen Zahlen. Sollte die natürliche Zahl des gegebenen Logarithmus größer ausfallen, als sie in den Tafeln gefunden wird, so hängt man noch so viel Nullen an diese, als Stellen fehlen, oder gesucht werden oder auch, wenn noch Dezimalen entwickelt werden sollen. Hierauf bilde man folgende Proportion:

Die logarithmische Differenz des nächst größern und nächst kleinern verhält sich zur logarithmischen Differenz des gegebenen und nächst kleinern, wie die Differenz der natürlichen Zahlen zu den Ziffern, welche der nächst klei-

nern natürlichen Zahl aus den Tafeln noch fehlen. Z. B. der

log: 3, 7823421 fällt zwischen die beiden Logarithmen von

6059 = 3, 7824010	und gegebener log:	3,7823421
6058 = 3, 7823293	nächst kleinern log:	3,7823293
1 717.		128.

Da zu der natürlichen Zahl 6058 noch Dezimalen zu entwickeln sind, um die natürliche Zahl noch genauer zu finden, so muß man an den Rest 1 so viel Nullen anhängen, als Dezimalen verlangt werden; doch darf man bei dieser Bestimmung nicht zu weit hinausgehen. Z. B. Es sollen noch 2 Dezimalen bestimmt werden, so ist:

$$717 : 128 = 100 : x$$

$$x = \frac{12800}{717} = 18 \text{ beinahe}$$

von dem Logarithmus 3, 7823421

ist die natürliche Zahl = 6058, 18...

Oder log: 5, 7321678 hiervon die natürliche Zahl.

log: 5398 = 3, 7322329	gegebener log:	5,7321678
log: 5397 = 3, 7321524	nächst klei. log:	5,7321524
1 805		154.

Hier ist die Kennziffer noch um so viel Einheiten vermehrt worden, damit sie eben so groß als die gegebene wird.

Es verhält sich daher: $805 : 154 = 100 : x$

$$x = \frac{15400}{805} = 19\ldots$$

Hätte man auch noch einige Dezimalen verlangt, so würde man dem Rest noch mehrere Nullen haben beifügen müssen.

Es ist daher zu dem Logarithmus

5, 7321678 die natürliche Zahl

$= 539800$

$19,\ldots\ldots\ldots$

$539819,\ldots\ldots\ldots$

a) Berechnung der Logarithmen.

F. Durch welche Gleichung kann man jedes Logarithmen-System ausdrücken?

A. Durch die Gleichung $a^x = m$, in welcher a die Grundzahl, x der Logarithmus der Zahl m für jedes Logarithmen-System ist.

F. Wie wird die Gleichung $a^x = m$, aufgelöst, wenn für a die gegebene Grundzahl und für m nach und nach die natürlichen Zahlen gegeben sind, um die Werthe oder Logarithmen x für die natürlichen Zahlen zu bestimmen?

A. Die Auflösung besteht darin, die Grundzahl a nach und nach zu ihren ganzen als gebrochenen Potenzen zu erheben, um verschiedene Zahlen hervor zu bringen; diese Exponenten sind dann die Logarithmen.

Setzt man in der gegebenen Gleichung $a = 10$, so ist auch $10^x = m$; nimmt man nun für m nach und nach die Primzahlen an, (da die Logarithmen von den Zahlen, welche aus Factoren bestehen, durch die Summe der Logarithmen, von den Factoren die Logarithmen der gegebenen Zahl leichter gefunden werden können, so wie man auch durch Subtraction der Logarithmen des Dividendus und Divisors den Logarithmus von dem Quotienten findet), so wird man im Stande seyn, das Brigg'sche Logarithmensystem zu berechnen; z. B. Um 10 zu $\frac{1}{2}$ Potenz zu erheben, ist es erforderlich, aus 10 die Quadratwurzel zu extrahiren, denn $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,1622776$ folglich der log: $3,1622776 = \frac{1}{2} = 0,5$; und $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3,1622776} = 1,77827941$ und log: $1,77828941 = 0,25$. Zieht man

daher aus 10 die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Quadratwurzel u. s. w., bis man 27 solcher Wurzeln mit 8 Dezimalstellen erhalten hat, so werden die Logarithmen mit 7 Dezimalen hervorgehn.

Die Quadratwurzeln und ihre Logarithmen sind demnach:

$10 = A$	$=$ log: $A=1.$
$\sqrt{A}=3,16227760=B$	„ $B=0,5$
$\sqrt{B}=1,77827941=C$	„ $C=0,25$
$\sqrt{C}=1,33352143=D$	„ $D=0,125$
$\sqrt{D}=1,15478198=E$	„ $E=0,0625$
$\sqrt{E}=1,07460790=F$	„ $F=0,03125$
$\sqrt{F}=1,03663296=G$	„ $G=0,015625$
$\sqrt{G}=1,01815174=H$	„ $H=0,0078125$
$\sqrt{H}=1,00903505=I$	„ $I=0,00390625$
$\sqrt{I}=1,00450737=K$	„ $K=0,001953125$
$\sqrt{K}=1,00225115=L$	„ $L=0,00097656$
$\sqrt{L}=1,00112494=M$	„ $M=0,00048828$
$\sqrt{M}=1,00056234=N$	„ $N=0,00024414$
$\sqrt{N}=1,00028113=O$	„ $O=0,00012207$
$\sqrt{O}=1,00014056=P$	„ $P=0,000061035$
$\sqrt{F}=1,00007027=Q$	„ $Q=0,00003052$
$\sqrt{Q}=1,00003514=R$	„ $R=0,00001526$

$\sqrt{R}=1{,}00001757=S$	log:	$S=0{,}00000763$
$\sqrt{S}=1{,}00000878=T$	„	$T=0{,}00000382$
$\sqrt{T}=1{,}00000439=U$	„	$U=0{,}00000191$
$\sqrt{U}=1{,}00000219=V$	„	$V=0{,}00000095$
$\sqrt{V}=1{,}00000110=W$	„	$W=0{,}00000048$
$\sqrt{W}=1{,}0000055\ =X$	„	$X=0{,}00000024$
$\sqrt{X}=1{,}00000028=Y$	„	$Y=0{,}00000012$
$\sqrt{Y}=1{,}00000014=Z$	„	$Z=0{,}00000006$
$\sqrt{Z}=1{,}00000007=\mathfrak{A}$	„	$\mathfrak{A}=0{,}00000003$
$\sqrt{\mathfrak{A}}=1{,}00000003=\mathfrak{B}$	„	$\mathfrak{B}=0{,}00000002$
$\sqrt{\mathfrak{B}}=1{,}00000001=\mathfrak{C}$	„	$\mathfrak{C}=0{,}00000001$

Mit diesen natürlichen Zahlen und den Logarithmen ist man nun im Stande, von einer gegebenen Zahl den Logarithmus zu finden.

Es werden die Factoren so mit einander multiplizirt, daß das Produkt der Zahl so nahe als möglich komme; addirt man die dazu gehörenden Logarithmen, so ergiebt sich mit der Summe der verlangte Logarithmus. Die dadurch erhaltenen Producte und Logarithmen setzt man zu den obigen Factoren, um die Berechnung für die übrigen Logarithmen zu erleichtern.

C F	=	1,91095310	=	a
a G	=	1,98095697	=	b
b J	=	1,99885501	=	c
c N	=	1,99997905	=	d
d T	=	1,99999661	=	e
e W	=	1,99999881	=	f
f X	=	1,99999991	=	g
g 𝔅	=	1,99999997	=	h
h ℭ	=	2,00000000	=	i

log: a	=	log: C	+	log. F	=	0,28125
" b	=	" a	+	" G	=	0,296875
" c	=	" b	+	" J	=	0,30078125
" d	=	" c	+	" N	=	0,30102539
" e	=	" d	+	" T	=	0,30102920
" f	=	" e	+	" W	=	0,30102968
" g	=	" f	+	" X	=	0,30102992
" h	=	" g	+	" 𝔅	=	0,30102994
" i	=	" h	+	" ℭ	=	0,30102996

Aus diesen Producten erhält man für den Logarithmus von 2 = 0,3010300

Um die Logarithmen für die übrigen Primzahlen zu erlangen, wird die Multiplication mit den Factoren fortgesetzt.

F. Können die Brigg'schen Logarithmen von der Grundzahl 10 nicht in ein anderes Logarithmensystem von der Grundzahl b verwandelt werden.

A. Ja; man darf die Brigg'schen Logarithmen nur mit dem Modul des neuen Systems multiplizieren, um die Logarithmen für die Grundzahl b zu erlangen.

F. Wie wird der Modul des neuen Systems gefunden?

A. Es sey z. B. nach dem Brigg'schen System $a^x = m$ und für das andere $b^y = m$, so ist $a^x = b^y$ desgleichen

$$x \log: a = y \log: b$$

$$y = \frac{\log: a}{\log: b} \times x$$

$$y = \frac{\log: 10}{\log b} \times x.$$

Setzt man statt b die Grundzahl des neuen Systems, welches z. B. 2,718281828459 seyn mag, dessen Logarithmus = 0,4342944819 ist; so ist der Bruch

$$\frac{\log: 10}{\log: 2{,}718281828459} = \frac{1}{0{,}4342944819}$$

= 2,302585093 als der Modul der gemeinen Logarithmen, womit die Brigg'schen Logarithmen multiplizirt werden müssen, um sie in natürliche Logarithmen zu verwandeln, welche man mit log: nat: bezeichnet.

F. Was versteht man unter den natürlichen Logarithmen?

A. Logarithmen, dessen Grundzahl 2,7182818 . . . ist und die ebenfalls zur Auflösung algebraischer Ausdrücke gebraucht werden.

F. In so fern aber die Berechnung der gemeinen Brigg'schen Logarithmen nach der oben angegebenen Methode sehr mühsam ist, kann denn keine allgemeine Formel ausfindig gemacht werden, nach welcher ein jeder Logarithmus berechnet werden könne?

A. Ja; wenn man in der Gleichung $a^x = m$ die Zahl m, welche größer als 1 ist, in zwei Theile $1 + n$ zerfällt annimmt, so ist die Gleichung $a^x = 1 + n$ und $\log: (1 + n) = x$. Eben so kann man a als die Grundzahl in zwei Theilen $1 + b$ betrachten, weil a größer als 1 seyn kann. Endlich verwandle man $(1 + b)^x$ nach dem bekannten Newtonschen

Lehrsatze in eine Reihe, aus welcher x durch n ausgedrückt werden kann; dann ist der Logarithmus von $1 + n$ gefunden. Z. B. $(1+b)^x$ in eine Reihe verwandelt giebt

$$(1+b)^x\ 1 + xb + \frac{x(x-1)}{2} b^2$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{2.\ 3.} b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.\ 3.\ 4.} b^4$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} b^5$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} b^6$$

Es war auch $(1 + b)^x = 1 + n$ also

$$n = b\,x + \frac{b^2 x^2}{2} - \frac{b^2 x}{2} + \frac{b^3 x^3}{2.\ 3.} - \frac{3 b^3 x^2}{2.\ 3.}$$

$$+ \frac{2 b^3 x}{2.\ 3.} + \frac{b^4 x^4}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{6 b^4 x^3}{2.\ 3.\ 4.}$$

$$+ \frac{11 b^4 x^2}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{6 b^4 x}{2.\ 3.\ 4.} + \frac{b^5 x^5}{2.3.4.5.} - \frac{10 b^5 x^4}{2.3.4.5.} \ldots$$

Ordnet man in diesem Ausdrucke die Glieder so, daß x^1, x^2, x^3, x^4 u. s. w. jede besonders zusammen gesetzt werden, so ist

$$n = \left\{ \begin{array}{l} bx - \frac{b^2 x}{2} + \frac{b^3 x}{3} - \frac{b^4 x}{4} + \frac{b^5 x}{5} - \frac{b^6 x}{6} + \ldots \\ + \frac{b^2 x^2}{2} - \frac{3 b^3 x^2}{2.\ 3.} + \frac{11 b^4 x^2}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{50 b^5 x^2}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} + . \\ + \frac{b^3 x^3}{2.\ 3.} - \frac{6 b^4 x^3}{2.\ 3.\ 4.} + \frac{35 b^5 x^3}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} \ldots\ldots \\ + \frac{b^4 x^4}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{10 b^5 x^4}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Zerfällt man die einzelnen Theile in Factoren, so ergiebt sich:

$$n = \left\{ \begin{array}{l} x \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6} \ldots \right) \\ + \frac{x^2}{2} \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6} \ldots \right)^2 \\ + \frac{x^3}{2.\ 3.} \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \ \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6} \ldots \right)^3 \\ + \frac{x^4}{2.\ 3.\ 4.} \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b_6}{6} \ldots \right)^4 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Um nun die Gleichungen einfacher auszudrücken, setze man den gemeinschaftlichen Factor $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6} \ldots\ldots = p.$

so ist

$$n = p\,x + \frac{p^2 x^2}{2} + \frac{p^3 x^3}{2.\ 3.} + \frac{p^4 x^4}{2.\ 3.\ 4.} + \frac{p^5 x^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.} \ldots$$

Durch Umkehrung der Reihen läßt sich aus der vorletzten Gleichung der Werth von b durch p und in der letzten Gleichung der Werth von px durch n ausgedrückt angeben. Es ist dann

$$b = p + \frac{p^2}{2.} + \frac{p^3}{2.3.} + \frac{p^4}{2.3.4.} + \frac{p^5}{2.3.4.5.} \ldots$$

$$x = \frac{1}{p}(n - \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{3} n^3 - \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{5} n^5 \ldots)$$

Es war ab r log: $(1 + n) = x$.

Mithin log: $(1 + n)$

$$= \frac{1}{p}(n - \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{3} n^3 - \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{5} n^5 \ldots$$

Legt man dieser Gleichung n einen negativen Werth bei, so ergiebt sich aus der Gleichung $(1 + a)^{-x} = 1 - n$ und wenn man diese gleich den vorhergehenden $(1 + a)^x = 1 + n$ behandelt, so kommt derselbe Werth hervor, denn es ist auch log: $(1 - n)$

$$= -\frac{1}{p}(n + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{5} n^5 \ldots)$$

Zieht man die Log: $(1 + n)$ und log: $(1 - n)$ von einander ab, so ist log: $(1 + n)$ — log: $(1 - n) = \frac{2}{p}(n + \tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{5} n^5 + \tfrac{1}{7} n^7 + \tfrac{1}{9} n^9 \ldots)$

oder log: $\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$

$$=\frac{2}{p}\,(n+\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{5}n^5+\tfrac{1}{7}n^7+\tfrac{1}{9}n^9\ldots.)$$

Wenn diese Reihe in der Anwendung brauchbar seyn soll, so muß n ein ächter Bruch seyn. Setzt man daher $n=\frac{1}{q}$, so ist $\frac{1+n}{1-n}$

$$=\frac{q+1}{q-1} \text{ und folglich log: } \left(\frac{q+1}{q-1}\right)$$

$$=\frac{2}{p}\left(+\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^3}+\frac{1}{5q^5}+\frac{1}{7q^7}+\frac{1}{9q^9}\ldots.\right)$$

ferner log: $(q+1)$

$$=\log:(q-1)+\frac{2}{p}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^3}+\frac{1}{5q^5}+\frac{1}{7q^7}+\right)$$

Nach dieser Formel lassen sich die Logarithmen aller Primzahlen finden, wenn man für q einmal 2, dann 3, und sofort alle Primzahlen setzt.

Die Logarithmen für die übrigen Zahlen finden sich leichter durch Addition und Subtraction, so wie es beim Gebrauche gezeigt wurde.

Wollte man aber eine noch schneller zusammenlaufende Reihe zur Berechnung für die Primzahlen haben, so setze man statt

$$\frac{q+1}{q-1} = \frac{v^2}{v^2-1}$$

$$qv^2 + v^2 - q - 1 = qv^2 - v^2$$

$$q = 2\,v^2 - 1$$

und $\log: \frac{v^2}{v^2-1} = \log: v^2 - \log: (v^2 - 1)$

$= 2 \log: v - \log: (v - 1) - \log: (v + 1);$

Mithin

$$2l.v - l.(v-1) - l.(v+1) = \frac{2}{p}\left[\frac{1}{2v^2-1} + \frac{1}{3(2v^2-1)^3} + \frac{1}{5(2v-1)^5} \ldots\right]$$

$$l.v = \frac{1}{2}\left[l.(v-1) + l.(v+1)\right] + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2v^2-1} + \frac{1}{3(2v^2-1)^3} + \frac{1}{5(2v^2-1)^5}\right]$$

Setzt man in dieser Gleichung zuerst $v = 2$, dann $v = 3$, so ergiebt sich für den log:

$$2 = \frac{2}{p}\left\{\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} \ldots\right) \\ + \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \frac{1}{7.17^7} \ldots \end{array}\right\}$$

$$3 = \frac{2}{p}\left\{\begin{array}{l} 3\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} \ldots\right) \\ + 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \frac{1}{7.7^7} \ldots\right) \end{array}\right\}$$

Wird die Summe der ersten Reihe A und die zweite B, angenommen, so ist $\log: 2 = \frac{2}{p}$ (2 A + B.)

$$\log: 3 = \frac{2}{p} (3\,A + 2B.)$$

In diesen angeführten logarithmischen Reihen kann der Werth des Buchstabens p der Modul der Logarithmen genannt werden. Um nun nach der hier angeführten Art die Berechnung der Logarithmen in ein System zu bringen, muß man dem Modul irgend einen Werth beilegen und mittelst der Formel

$$b = p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.\,3} + \frac{p^4}{2.\,3.\,4} + \frac{p^5}{2.\,3.\,4.\,5} \ldots$$

die dazu gehörige Grundzahl bestimmen. Nimmt man für p = 1 an, so heißen die für den Modul = 1 berechneten Logarithmen natürliche Logarithmen. Die Grundzahl 1 + b der natürlichen Logarithmen wird dadurch gefunden, daß man b aus der obigen Gleichung bestimmt und 1 hinzu addirt, so erhält man 2,718281828459.

Da sich die natürlichen Logarithmen leicht

berechnen lassen, so wird man wohl thun, diese erst zu berechnen, und sie dann durch Multiplication mit 0,434294829 in die gemeinen Briggschen Logarithmen zu verwandeln.

b. Anwendung der Logarithmen auf Rechnungsfragen.

F. Wie werden die Logarithmen zur Entwickelung eines algebraischen Ausdruckes angewendet?

A. Da aus dem Gebrauche der Logarithmen bekannt ist, daß das Product zweier Zahlen gleich sey der Summe der Logarithmen dieser Factoren, so ist auch $\log: ab = \log: a + \log: b$. Der Quotient zweier Factoren ist gleich dem Logarithmus des Dividendus oder Zähler weniger dem Logarithmus des Divisors oder Nenners, als: $\log: \frac{a}{b} = \log: a - \log: b$

Die n^{te} Potenz einer Zahl wird gefunden, wenn man den Logarithmus dieser Zahl mit den Pontenzexponenten multiplizirt, als: $\log: a^n = n \cdot \log: a$. oder $(a+b)^3 = 3 \log: (a+b)$ Endlich wird die n^{te} Wurzel aus irgend einer Zahl gefunden, wenn der Logarithmus dieser

Zahl durch den Wurzelexponenten dividirt wird, als:

$$\log:\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log:a \text{ oder } \log:a\sqrt[n]{b^2}=\log:a+\frac{2}{n}$$

log: b oder auch

$$\log:\frac{a\sqrt[4]{b}}{c\sqrt{d}}=\log:a+\frac{1}{4}\log:b-\log:c-\frac{1}{2}\log:d$$

eben so

$$\log:(a+b)^3c^2=3\log:(a+b)+2\log:c.$$

Gleichungen, worinnen Exponentialgrößen vorkommen, werden mittelst der Logarithmen in logarithmische Gleichungen verwandelt, z. B.

$$a^x=b;\ x\log.a=\log:b$$

$$x=\frac{\log:b;}{\log:a}$$

$$q^n=\frac{Gq}{a};\ n\log:q=\log:G+\log:q-\log:a$$

$$n=\frac{\log:G+\log:q-\log:a.}{\log.q}$$

$$a=\frac{G}{n-1};\ \log:a=\log:G-(n-1)\log:q$$

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{G}{a}};\ \log:q=\frac{1}{n-1}\left[\log:G-\log:a\right]$$

Aufgaben für geometrische Reihen.

1) 1364 Thaler sind unter eine Anzahl Personen vertheilt worden, so daß die erste 4 Thlr. und jede folgende eine neue Potenz von 4 erhalten hat. Wie viel Personen nehmen Antheil an der Vertheilung?

Hier ist 1364 = S als Summe der geometrischen Progression 4 = a das erste Glied.
4 = e der Exponent.

Es soll ferner 12 als die Anzahl der Glieder oder Personen gefunden werden, so ist nach der Formel

$$e^n = \frac{a + (e - 1) S}{a}$$

$$n \log : e = \log : \left[\frac{a + (e - 1) S}{a}\right]$$

$$n = \frac{\log : \left[\frac{a + (e - 1) S}{a}\right]}{\log : e}$$

$$= \frac{\log . \left[\frac{4 + (4 - 1) 1364}{\log : 4}\right]}{\log : 4} = \frac{\log : 1024}{\log : 4.}$$

$$= \frac{3,0103000}{0,6020600} = 5 \text{ Personen.}$$

2) Die Barometerhöhen nehmen in geometrischer Progression ab, wenn die Höhen von der Erde an arithmetischen zunehmen, in so fern auf die Ungleichheit der Temperatur der Luft und andere Einwirkungen nicht Rücksicht genommen wird. Wäre nun bekannt, wie hoch man steigen müßte, damit das Barometer um eine Linie, oder einen Zoll falle, so könnte man daraus für jede Barometer-Höhe die Höhe des Standorts berechnen.

Steht das Quecksilber an der Oberfläche des Meeres 28 Zoll oder 336 Linien hoch und in einer Höhe von 78 Fuß über dem Meere 335 Linien, so machen die Barometer-Höhen, für jede Zunahme von 78 Fuß Höhe des Standorts eine geometrische Progression aus, deren Exponent $\frac{335}{336}$ ist.

F. Wie hoch steht daher das Barometer in der Höhe von 7800 Fuß über der Meeresfläche?

A. Die dazu gehörige Barometerhöhe ist das 100te Glied in der geometrischen Reihe nach 336 Linien.

Mithin ist dieses Glied

$$G = ae^{n-1}\,336.\left[\frac{335}{336}\right]^{101-1}$$

log. 336 = 2,5263393
„ 335 = 2,5250748
— 0,0012945, die hundertste

Potenz davon ist — 0,1294500
log: 336 = 2,5263393

Unterschied = 2,3968893, hiervon die natürliche Zahl giebt 249,4 Linien = 20 Zoll $9\frac{4}{10}$ Linie.

Eben so erhält man umgekehrt aus der Barometerhöhe die Höhe des Standorts über der Meeresfläche, wenn man von den Logarithmus der Zahl 336 dem Logarithmus der Linien in der Barometerhöhe abzieht, den Rest durch 0,0012945 dividirt und den Quotienten mit der Höhe 78 multiplicirt. Z. B.

log. 336 = 2,563393
„ 249,4 = 2,3968893
0,1294500 den Rest durch 0,0012945 dividirt, giebt 100; diesen Quotienten mit 78 multiplicirt, giebt 7800 Fuß Höhe über der Meeresfläche.

3) Es will Jemand sein 24 Hufenguth

verkaufen und verlangt für die erste Hufe 1 Pfennig, für die zweite 2 Pfennige, für die dritte 4 Pfennige, so daß er für jede folgende Hufe noch einmal so viel als für die vorhergehende erhält. Wie viel beträgt der Kaufpreiß?

Das erste Glied = 1
Der Exponent = 2
Die Anzahl der Glieder = 24

$$\text{so ist die Summe } S = \frac{a\,(e^n - 1)}{e - 1}$$

$$= 1\,\frac{(2^{24} - 1)}{2 - 1} = 2^{24} - 1 \text{ Pfennige.}$$

Daher ist 24 log. 2 = 0,3010300 × 24
= 7,2247200 = 16777216;
und S = 16777216 − 1 = 16777215 Pf.
= 58254 Thaler 5 Groschen 3 Pfennige.

4) Vier Personen sollen eine Summe Geld nach folgender Ordnung unter sich theilen: Der erste soll 4000 Thaler und jeder folgende $\frac{2}{5}$ mal so viel als der nächst vorhergehende haben. Wie viel beträgt die Summe? und wie viel erhält jeder?

Die Summe $S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{4000(\frac{16}{625} - 1)}{\frac{2}{5} - 1}$

$= \frac{812000}{125} = 6496$ Thaler.

$a = 4000$	Der erste	$= 4000$	Thaler
$e = \frac{2}{5}$	„ zweite	$= 1600$	„
$n = 4$	„ dritte	$= 640$	„
	„ vierte	$= 256$	„
		6496	Thaler.

Aufgaben von der zusammengesetzten Interessen-Rechnung.

1) Zu welcher Summe wächst ein Kapital 2000 Thaler bei einem Zinsfuß jährlich zu 5 Procent in zehn Jahren an, wenn man alle Jahre die Interessen zu dem Kapitale schlägt?

Wenn man von 100 Thalern in einem Jahre p Thaler Zinsen erhält, so bringt ein Kapital von a Thaler in einem Jahre $\frac{ap}{100}$ Thaler Interessen; daher wird am Ende des ersten Jahres das Kapital mit den Interessen zu

$$a + \frac{ap}{100} = \frac{100a + ap}{100} = a\,\frac{(100 + p)}{100}$$

Thaler angewachsen seyn. Verborgt man die-

ses neue Kapitel wieder zu p Procent, so erhält man nach der Proportion:

$$100 : p = a\left[\frac{100+p}{100}\right] : ap\left[\frac{100+p}{10000}\right]$$ Thaler Interessen. Mithin am Ende des zweiten Jahres an Kapital u. Interessen $a + ap\left[\frac{100+p}{10000}\right]$

$$= \frac{10000\,a + 100\,ap + ap^2}{10000}$$

$$= a\left[\frac{10000 + 100\,p + p^2}{100000}\right] = a\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$$

Thaler. Am Ende des n^{ten} Jahres wird das Kapital bis zu $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ Thaler angewachsen seyn. Nennt man daher die Summe, zu welcher ein Kapital a nach n Jahren bei einem Zinsfuß p Procent angewachsen ist S, so ist $S = a\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$; diese Gleichung logarithmisch aufgelöst, findet man für S, a, p und n die vier Gleichungen:

$\log. S = \log. a + n \log. \left[\frac{100+p}{100}\right]$ oder wenn man den Bruch

$\frac{100+p}{100} = q$ setzt.

$\log. a = \log. S - n \log. q.$

$\log. q = \frac{1}{n} (\log. S - \log. a)$

$n = \frac{\log. S - \log a.}{\log. q.}$

Nimmt man statt der hier angenommenen Buchstaben die oben gegebenen Zahlenwerthe, so findet man nach der Formel für S den baaren Werth des Kapitals nach 10 Jahren zu 5 Procent. Z. B.

Es sey $\log : S = \log : 2000 + 10 \log : 1{,}05$

$\;\; " \;\; 2000 = 3{,}3010300$

$10 \;\; " \;\; 1{,}05 = 0{,}2118930$

$3{,}5129230 = 3257$ Thaler 18 Groschen $11\frac{13}{15}$ Pfennige.

2) Wie lange muß bei einem Zinsfuße zu 5 Procent ein Kapital 1000 Thaler stehen, damit das Kapital nebst den Interessen bis zu 2860 Thalern angewachsen ist?

Hier ist

$$n = \frac{\log: S - \log: a}{\log: q} = \frac{\log: 2860 - l.\ 1000}{\log: 1{,}05}$$

$\log: 2860 = 3{,}4563660$

$\log: 1000 = 30000000$

$0{,}4563660$

$\log: \ 1{,}05 = 0{,}0211893$

$= \frac{4563660}{211893} = 21{,}538 = 21\frac{269}{500}$ Jahre

3) Wie viel ist eine Summe von 8000 Thalern, welche nach 6 Jahren gefällig ist, jetzt werth, wenn Interessen von Interessen und zwar zu 3 Procent gerechnet werden?

$\log: a = \log: 8000 - 6 \log: 1{,}03$

$\log: 8000 = 3{,}9030900$

$6 \log: \ 1{,}03 = 0{,}1271348$

$3{,}7759552 = 5969$ Thaler 17 Groschen $8\frac{32}{125}$ Pfennige.

4) Ein Kapital von 4000 Thalern steht auf Zinseszinsen zu 5 Procent und wird am Ende eines jeden Jahres, außerdem, daß die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, auch noch um 200 Thaler vermehrt. Wie groß wird das Kapital nach 10 Jahren seyn?

Es wird nach der obigen Regel ein Kapital nach n Jahren zu p Procent bis zu aq^n anwachsen. Da nun aber noch ein Kapital 200 = b Thaler am Ende eines jeden Jahres zugelegt werden soll, so wird das Kapital

nach dem ersten Jahre seyn $= aq + b$

" " zweiten " " $= aq^2 + bq + b$

" " dritten " " $= aq^3 + bq^2 + bq + b$

" " n^{ten} " " $= aq^n + bq^{n-1} + bq^{n-2} + \ldots\, bq + b.$

Die Summe der letzten Reihe aber ist

$$S = aq^n + \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$$

Es ist nach der gegebenen Aufgabe

$$S = 4000 \cdot 1{,}05^{10} + \frac{200\,(1{,}05^{10} - 1)}{1{,}05 - 1}$$

= 9031 Thaler 3 Groschen $10\frac{2}{25}$ Pfennige.

Sollte aber am Schlusse eines jeden Jahres eine Summe weggenommen werden, so wird der Rest nach n Jahren durch die Formel

$aq^n - \dfrac{b(q^n - 1)}{q - 1}$ gefunden.

Verbesserungen,

welche noch vor dem Gebrauche zu berichtigen sind.

Seite 21	Zeile 7	von oben	statt $6x^3y$ l. $-6x^3y$
— 25	— 3	— unten	— $-4ac^2$ l. $-4ac^2$
— 29	— 4	— —	— $\frac{7a-^2x}{b}$ l. $\frac{7a^{-2}x}{3b}$
— 31	— 5	— —	— $-2a^3$ l. $-4a^3$
— 44	— 3	— —	— $-17x$ l. $-19x$
— 57	— 11	— oben	— $8x \mp 12y = -20$ l. $8x \pm 12y = 20$
— 59	— 2	— —	— $y\,20$ l. $y-20$
— —	— 3	— —	— $20ay$ l. $20xy$
— —	— 8	— —	— $720x$ l. $-720x$
— 64	— 4	— unten	— Theile positive l. Theile ganze positve.
— 77	— 4	— —	— x^8 l. x^{-8}
— 80	— 5	— —	— $b^3 = b^2$ l. $b^2 = 6^x$
— 96	— 16.17	— —	— $\left(\begin{matrix}44\\64\end{matrix}\right.$ l. $\begin{matrix}44\\46\end{matrix}$
— 98	— 4	— oben	— $9x^2$ l. $-9x^2$
— 98	— 10	v. o.	st. $3ab^2 - 27x$ l. $3ab^2 = 27x$
— 103	— 5	von oben	st. $a\frac{1}{2}\,b\frac{1}{2}$ l. $a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}$
— 112	— 1	— oben	st. $\bar{x}$ l. x
— 178	— 6	— —	— durch 3 dividirt l. durch 9 dividirt.
— 183	— 15	— unten	fehlen zwischen ae und ae^2 zwei Punkte
— 185	— 13	— —	soll seyn $= ae : ae^2 = ae^3$
— —	— 5	— —	muß es heißen ae^{n-1}
— 186	— 1	— oben	l. $(S - ae^n - ^1)$
— 188	— 7	— unten	l. $\frac{G}{a}$.

Empfehlungswerthe Bücher der Baumgärtnerschen Buchhandlung:

Albert, J. B., le secrétaire, français a l'usage des allemands, qui désirent écrire avec goût et justesse. gr. 8. 1 Thlr. 12 Gr.

Anecdoten und Charakterzüge, auch Relationen von Schlachten und Gefechten aus den merkwürdigen Kriegen in Süd- und Nordteutschland in den Jahren 1805 — 9. 1r bis 10r Band, oder 1s bis 4s Heft à 12 Gr. 10 Thlr.

Anecdoten und Bemerkungen, Musik betreffend. Zur Unterhaltung und Belehrung für die Freunde der Geschichte, und Cultur der Tonkunst und der mit ihr zusammenwirkenden Künste. Größtentheils aus dem Englischen des A. Burgh, A. M. bearbeitet von C. F. Michaelis. kl. 8. 1 Thlr.

Anleitung zur Bildung des mündlichen Vortrags für geistliche und weltliche Redner. 8. 16 Gr.

Ansichten von Palästina, oder dem heiligen Lande; nach Ludwig Mayers Originalzeichnungen, mit Erläuterungen vom Prof. E. F. K. Rosenmüller in Leipzig 3 Bände mit 36 Kupfern, quer Fol. 12 Thlr.

— in der Türkei, hauptsächlich Caramanien, einem bisher wenig bekannten Theile von Kleinasien. Nebst einer Auswahl merkwürdiger Ansichten von den Inseln Rhodus und Cypern und den berühmten Städten Corinth, Carthago und Tripoli, nach den Originalzeichnungen des Herrn Ludwig Mayer und mit Erläuterungen von dem Dr. Bergk. Mit 20 Kupfern, quer Fol. 6 Thlr.

(Ein Pendant zu den Ansichten von Palästina.)

Anweisung, gründliche, zum Rechtschreiben der deutschen Sprache. Für den Unterricht der Ju-

gend bearbeitet von M. Johann Peter Graubner, Privatlehrer in Leipzig. 8. 1 Thlr.

Atlas, historischer, von Sachsen, oder augenblickliche Uebersicht der verschiedenen Besitzungen dieses Landes seit dem Jahre 950 bis 1815. Dargestellt auf 25 illum. Karten. 2 Thlr.

— von Preußen in 12 illum. geogr. Karten mit Erläuterungen über die Vergrößerungen und Verkleinerungen dieses Landes von 1273 — 1816. quer 4. broch. 1 Thlr. 8 Gr.

— historischer, von Rußland, Schweden, Polen, Oesterreich und der Türkei, in 5 illum. Karten mit Erläuterungen über die Vergrößerungen und Verkleinerungen dieser Länder in den Jahren 1155 bis 1816. quer Fol. broch. 18 Gr.

Baumgärtner, F. G., Reise durch einen Theil Spaniens, nebst der Geschichte des Grafen v. S., mit illuminirten und braunen Kupfern und Musik. 8. Schreibp. 1 Thlr. 4 Gr.

— Gustav Adolph, König der Schweden, als Freund und Liebhaber in der Manier des Meißnerischen Alcibiades dargestellt. Ein Roman. 8. mit 3 Kupfern. 1 Thlr.

Bellamy's, Joh., Geschichte aller Religionen mit Angabe der Lehren und der Ausübung des Gottesdienstes unter allen Arten und Bekennern des Christenthums, enthaltend eine Reihe erläuternder Untersuchungen über die Meinungen, Sitten und gottesdienstlichen Gebräuche in den Kirchen von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten und über den Ursprung und die Ursache und Ausübung des Götzendienstes und seiner verschiedenen Formen. Nach der zweiten englischen Ausgabe übersetzt. 8. 1 Thlr. 4 Gr.

Bilderbuch, asiatisches, oder das asiatische Magazin, 9 Hefte, in einem Bande zu herabgesetztem Preis. Mit 52 illuminirten Kupfern. 48 Thlr.

Bingley's, W., Biographieen der Thiere, oder Annalen von den Fähigkeiten, der Lebensart, den Sitten und der Haushaltung der thierischen Schöpfung. Nach dem Englischen mit Zusätzen bearbeitet und mit einer Einleitung über die Psychologie der Thiere versehen von Dr. J. A. **Bergk**. 8. 3 Theile. 4 Thlr. 12 Gr.

Auch unter dem Titel:

Bingley's, W., Thierseelenkunde, oder Sammlung merkwürdiger Anekdoten aus dem Thierreiche, und Schilderung des geistigen Zustandes der Thi[ere]. Nach dem Englischen bearbeitet und mit Bemer[kun]gen aus der Organenlehre des Dr. Gall in Ansehung des Thierreichs versehen von Dr. Bergk. 8.

Brutus, oder der Sturz der Tarquinier. Mit einem Kupfer. Schreibp. 8. 1 Thlr.

Buch, das goldene, für hohe und niedere Stände, oder Grundregeln, gut, klug und leicht durch die Welt zu kommen. Zweite verbesserte Auflage, aus dem Englischen nach der eilften Ausgabe. gr. 8. 1 Thlr. 8 Gr.

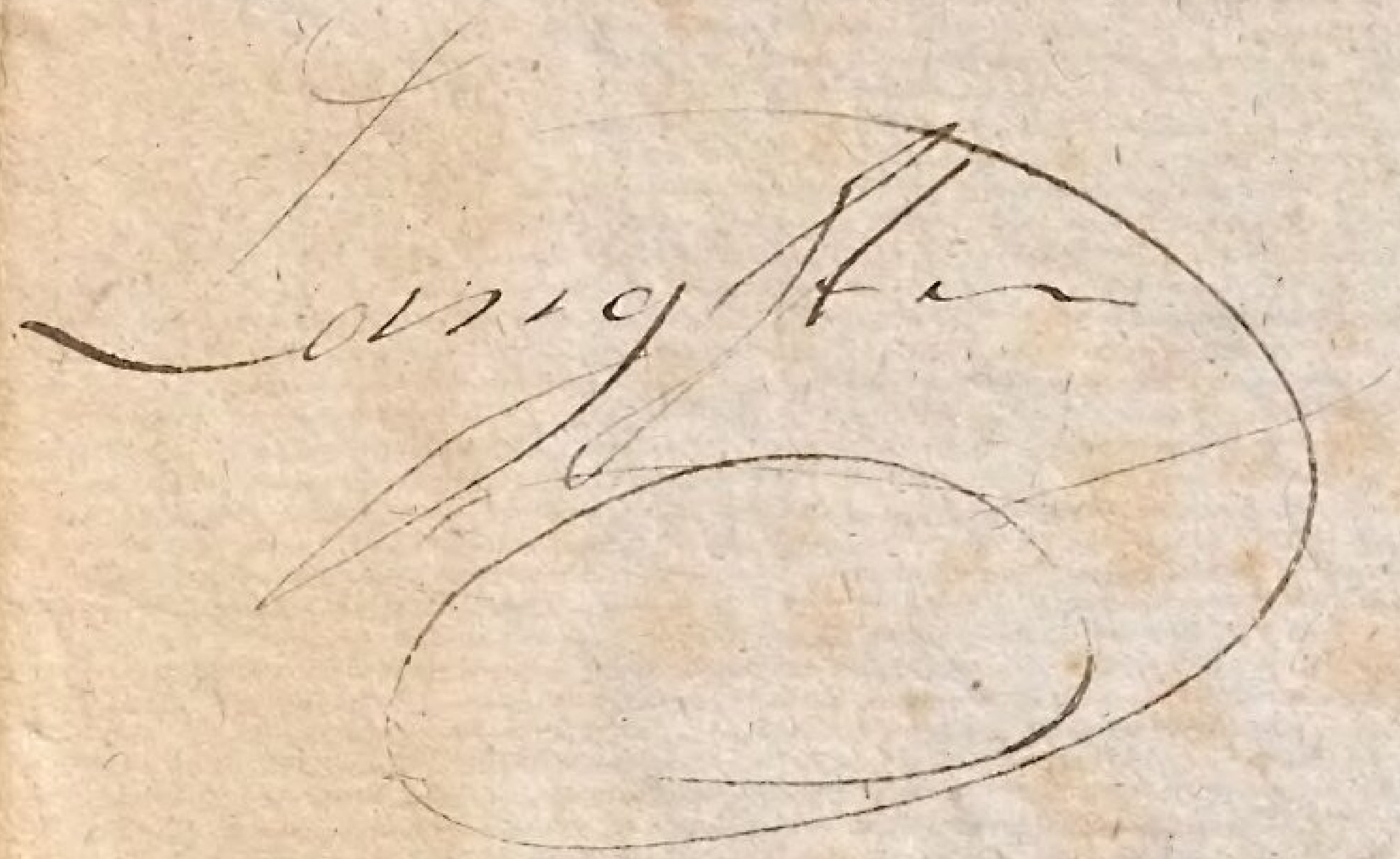
Busby, Thomas, allgemeine Geschichte der Musik, von den frühesten bis auf die gegenwärtigen Zeiten, nebst Biographieen der berühmtesten musikalischen Componisten und Schriftsteller. Aus dem Englischen übersetzt und mit einigen Anmerkungen und Zusätzen begleitet von C. F. Michaelis. In zwei Bänden. Erster Band gr. 8. 2 Thlr. 12 Gr. Zweiter Band 3 Thlr. 12 Gr.

22/1. 37. Schulze

20/12 37 gezählt. Schulze

20/X 86 gezählt Schulze

18/III 87 abgez. Schulz



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolffersdorff, Ernst <<von>>

Katechismus der Algebra zum Gebrauch in Schulen und zum Selbstunterricht

Leipzig 1824

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.145
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739951-9